

МОДЕЛИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА УДАРА НА ТВЪРДО ТЯЛО С ГУМЕН БУФЕР

MODELING AND INVESTIGATION OF THE IMPACT OF A RIGID BODY WITH A RUBBER BUFFER

Доц. д-р инж. Митев Н. Ал.
Технически университет – Габрово, България

E-mail: mitev_n@tugab.bg

Abstract: On the basis of an experimental investigation of the impact of a rigid body with a rubber buffer and the experimental data obtained for distribution of the impact force for the time of the impact (impact impulse), the impact has been modeled and a numerical investigation for the behavior of the front face receive the impact upon a spherical shape of the surface has been carried out. Data of the acceleration, velocity and displacement have been obtained.

Keywords: IMPACT, IMPACT FORCE, VISCOELASTIC IMPACT, RUBBER BUFFER, VISCOELASTIC BUFFER

1. Увод

Ударът на твърдо тяло с гумен буфер е проблем, представляващ интерес, както от научно-изследователска, така и от инженерно практическа гледна точка поради редица причини. Широкото използване на гумените буфери в инженерната практика, като елемент на безопасността е главно поради ниската им себестойност, ефективната им работа и високата надеждност. Поради високата си коравина спрямо тази на буфера, металните конструкции, които те защитават имат поведение на абсолютно твърдо тяло, като при удар възбуждат в буфера вискоеластична вълна, в резултат от движението на която се разсейва значително количество от енергията на удара.

В тази работа удара на твърдо тяло с гумен буфер е моделиран с помощта на модел на конзолно закрепен вискоеластичен прът с постоянно напречно сечение, в свободния край на който се прилага външно силово въздействие. Приемаме, че външното силово въздействие е известна величина, в конкретния случай тя е определена с помощта на натурен експеримент.

В този доклад са представени част от резултатите, свързани с моделиране на удара на твърдо тяло с гумен буфер и численото експериментирание за установяване на поведението на гумени буфери с конична форма и сферична челна повърхнина при удар.

Изследвани са два вида буфери – единият с радиус на сферичната повърхнина $R=40\text{mm}$ - (RB-R040), а другият с радиус на сферичната повърхнина $R=120\text{mm}$ - (RB-R120).

2. Предпоставки и начин за решаване на проблема

Уравнението на движение на буфера в надлъжно на геометричната му ос направление при конзолно закрепване и дължина l и при приложена (отнесена към единица обем) външна сила има вида:

$$(1) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau \right) + g(x,t),$$

където: ρ - масова плътност на пръта; $u(x,t)$ - преместване; $g(x,t)$ - обемно разпределена сила действаща върху буфера;

$R(t-\tau)$ - функция на скоростта (ядро) на релаксация.

Началните и гранични условия са следните:

$$u(x,t)|_{t=0} = f_1(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f_2(x); \quad u(x,t)|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0.$$

Решението на уравнението по метода на Фурие има вида:

$$(2) \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$$

Търсим решение за случая когато

$$(3) \quad g(x,t) = F(t) \frac{\rho}{A} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}, \quad A_k = \text{const}$$

След заместване получаваме:

$$\ddot{T}_k + \omega_k^2 T_k = F(t) + \varepsilon \omega_k^2 \int_0^t R(t-\tau) T_k(\tau) d\tau, \quad k=1, 2, \dots, \infty$$

$$\text{където } \omega_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Решението на горното уравнение търсим във вида:

$$T_k(t) = c_{1k} \cos(\omega_k t) + c_{2k} \sin(\omega_k t) + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\omega_k^2 - p_i^2} \sin(p_i t)$$

$$\dot{T}_k(t) = \omega_k (-c_{1k} \sin(\omega_k t) + c_{2k} \cos(\omega_k t)) + \sum_{i=1}^N \frac{B_i p_i}{\omega_k^2 - p_i^2} \cos(p_i t)$$

Замествайки и решавайки системата уравнения спрямо \dot{c}_1 и \dot{c}_2 достигаем до следната система интегро-диференциални уравнения:

$$\ddot{c}_{1k} = -\frac{\varepsilon}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \left\{ \omega_k^2 \int_0^t R(t-\tau) \left[c_{1k}(\tau) \cos(\omega_k \tau) + c_{2k}(\tau) \sin(\omega_k \tau) + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\omega_k^2 - p_i^2} \sin(p_i t) \right] d\tau \right\}$$

$$\dot{c}_{2k} = \frac{\varepsilon}{\omega_k} \cos(\omega_k t) \left\{ \omega_k^2 \int_0^t R(t-\tau) \left[c_{1k}(\tau) \cos(\omega_k \tau) + \right. \right.$$

$$(4) \quad F_{IMP}(t) = 2B e^{\sigma t} \left(\sin(\omega_c t) \right)^\beta \cdot \left. \left. + c_{2k}(\tau) \sin(\omega_k \tau) + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\omega_k^2 - p_i^2} \sin(p_i t) \right] d\tau \right\}$$

3. Решаване на проблема. Резултати и дискусия

Решението на горната система интегро-диференциални уравнения с помощта на метода на усредняване, при достатъчно малка стойността на параметъра ε и при представяне на външното натоварване с помощта на (4) има вида (5).

Моделирането на външното силово въздействие с помощта на (4) численото експериментиране за определяне на преместването $u(x, t)$, скоростта $v(x, t)$ и ускорението $a(x, t)$ на буфера с помощта съответно на (5), (6) и (7) е изпълнено с потребителски програми в среда на MathCAD.

$$(5) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^n T_k(t) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \approx \sum_{k=1}^n \left\{ \exp\left(-\frac{\varepsilon \omega_k R_{sk} t}{2}\right) \left[c_{1k}^0 \cos\left(\omega_k - \frac{\varepsilon \omega_k R_{ck}}{2}\right) t - c_{2k}^0 \sin\left(\omega_k - \frac{\varepsilon \omega_k R_{ck}}{2}\right) t \right] + \frac{(2B_i e^{-\sigma t} \sin(\omega_c t))^\beta}{\omega_k^2 - \omega_c^2} \right\} \times \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}, \text{ където:}$$

$n = 8$ е броят цикли на разпространение на вискоеластичната вълна в буфера;

(При буфер RB-R040 и $\delta E = 13508 \text{ J/m}^3$ $\tau_{IMP} = 31.1 \text{ ms}$, а при $\delta E = 108679 \text{ J/m}^3$ $\tau_{IMP} = 25.3 \text{ ms}$, при буфер RB-R120 и $\delta E = 13508 \text{ J/m}^3$ $\tau_{IMP} = 31.1 \text{ ms}$, при буфер RB-R120 и $\delta E = 108679 \text{ J/m}^3$ - $\tau_{IMP} = 20.9 \text{ ms}$).

$$a = 77.358 \text{ m/s}, \text{ (което съответства на } \sim 8 \text{ цикъла),}$$

$$\text{(Скоростта на разпространение на вълната } a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{);}$$

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \text{ kg - еквивалентна маса;}$$

$$m_2 = 25 \text{ kg - маса на удрящото се в буфера твърдото тяло;}$$

$$m_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi d^2}{4} l \cdot \rho \right) \text{ - приведена маса на на буфера;}$$

$$m_1 = 0.2812 \text{ kg - (RB-R040), } m_1 = 0.2831 \text{ kg - RB-R120);}$$

$$d = 0.095 \text{ m, - усреднена стойност на диаметъра;}$$

$$l = 0.100 \text{ m - дължина на буфера;}$$

$$\rho = 1200 \text{ kg/m}^3 \text{ - плътност на гумата.}$$

Материалните свойства са представени с помощта на еластичния модул $E = 7.181 \cdot 10^6, \text{ Pa}$ и ядрата на пълзене и релаксация на Работнов

$$K(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]},$$

$$R(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

и определените в [5] коефициенти:

$$\lambda = 0.009051, \alpha = -0.18942, \beta = 0.04812.$$

$$R_{sk} = \int_0^\infty R(s) \sin(\omega_k s) ds \text{ и } R_{ck} = \int_0^\infty R(s) \cos(\omega_k s) ds$$

са съответно синус и косинус преобразуване на Фурие.

Интеграционните константи c_{1k}^0 и c_{2k}^0 са съответно:

$$c_{1k}^0 = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} dx$$

$$c_{2k}^0 = -\frac{\varepsilon \omega_k R_{sk}}{2\alpha_k} c_{1k}^0 - \frac{2}{\alpha_k l} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} dx \quad \kappa$$

където:

$$\alpha_k = \omega_k - \frac{\varepsilon \omega_k R_{ck}}{2}, \quad \omega_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Интеграционните константи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са определени въз основа на данните от експерименталните изследвания. Техните стойности са съответно:

за буфери RB-R040 (-01) и RB-R120 (-01) при енергия на удара отнесена към единица обем от буфера $\delta E = 13508 \text{ J/m}^3$:

$$f_{1x,0} = u_0 = 0, \quad f_{2x,l} = v_0 = -0.602 \text{ m/s};$$

за буфери RB-R040 (-05) и RB-R120 (-05) при енергия на удара отнесена към единица обем от буфера $\delta E = 108679 \text{ J/m}^3$:

$$f_{1x,0} = u_0 = 0, \quad f_{2x,l} = v_0 = -1.768 \text{ m/s}.$$

За моделиране на ударния импулс - $F_{IMP}(t)$ е използван метода на най-малките квадрати, зависимостта (4) и база експериментални данни за стойността на ударната сила за времето на удара за двата буфера при посочените по-горе стойности на началната скорост на удара. Част от получените резултати при гранични стойности на ударната сила за изследваните два вида буфери са представени на фиг.1, а стойностите на регресионните коеф. са поместени в табл.1.

Табл. 1. Стойности на регресионните параметри при моделиране на ударния импулс с помощта на уравнение (4).

Скорост на удара $v_1, \text{ m/s}$	$\omega_c \text{ rad/s}$	B, N	$\sigma, 1/s$	β	Коеф. на регресия r
Гумен буфер RB-R040					
0.602	100.1	-9503.1	-13.07	1.2775	0.9985
1.768	121.5	-38732.8	-28.06	1.4089	0.9984
Гумен буфер RB-R120					
0.602	144.1	-12540	-32.67	1.2275	0.9975
1.768	146	-47069	-37.02	1.2685	0.9967

На фиг. 2. и фиг. 3 са представени резултатите от численото експериментирание за определяне на преместването на челната повърхнина на гумен буфер със сферична челна повърхнина RB-R040 (-01) и (05), а на фиг. 4 за RB-R120 (-05). Показана е реакцията на свободната челната повърхнина в преместване т.е. закона за движение на същата, под действие на импулсното външно натоварване съгласно (5). На фиг. 5 и фиг. 6 са показани решенията на същата задача съответно в скорост, определени с помощта на (6), а на фиг. 9 в ускорение, определени с помощта на уравнение (7).

$$(6) \quad v(x,t) \approx \sum_{k=1}^n \left\{ \exp\left(-\frac{\varepsilon \omega_k R_{sk} t}{2}\right) \left[-\frac{\varepsilon \omega_k R_{sk}}{2} c_{334k}^0 + c_{334ak}^0 \right] + \frac{B e^{\sigma t}}{M(\omega_k^2 - \omega_c^2)} \cdot [\sin(\omega_c t)]^\beta \cdot [\sigma + \beta \omega_c \cot(\omega_c t)] \times \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \right\}$$

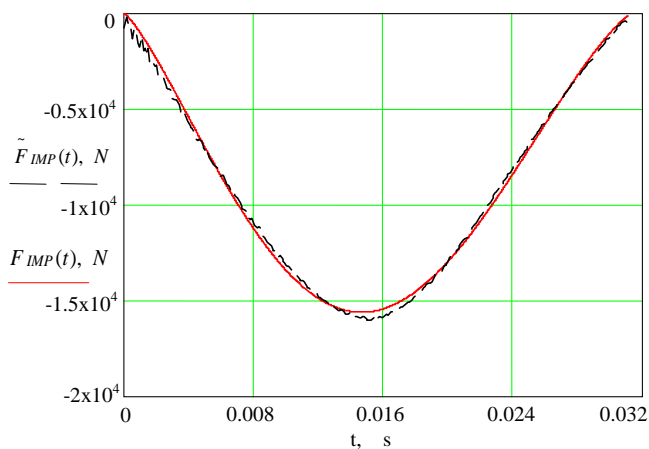
$$(7) \quad a(x,t) \approx \sum_{k=1}^n \left\{ \exp\left(-\frac{\varepsilon \omega_k R_{sk} t}{2}\right) \left[\left(\frac{\varepsilon \omega_k R_{sk}}{2}\right)^2 c_{334k}^0 - 2 \frac{\varepsilon \omega_k R_{sk}}{2} c_{334ak}^0 + c_{334bk}^0 \right] + \frac{B e^{\sigma t} [\sin(\omega_c t)]^{\beta-2}}{M(\omega_k^2 - \omega_c^2)} \times \left[\frac{\sigma^2 - 2\beta \omega_c^2 - \sigma^2 \cos(2\omega_c t) + \beta^2 \omega_c^2 + \beta^2 \omega_c^2 \cos(2\omega_c t)}{2} + \frac{2\beta \omega_c \sigma \sin(2\omega_c t)}{2} \right] \right\} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}, \quad \text{където:}$$

$$c_{334k}^0 = -\frac{2}{l} c_{33k}^0 \cos(\alpha_k t) - c_{34k}^0 \sin(\alpha_k t);$$

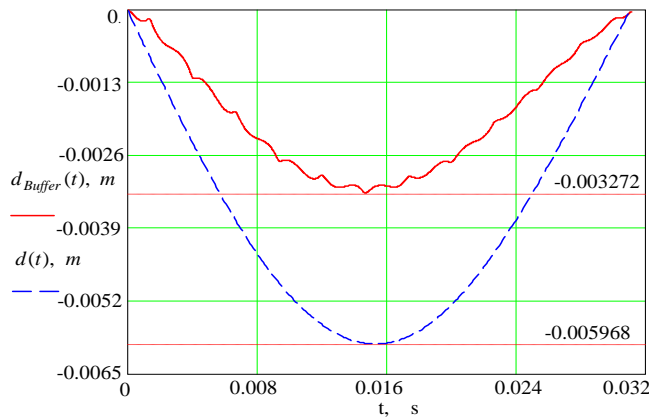
$$c_{334ak}^0 = -\alpha_k \left(\frac{2}{l} c_{33k}^0 \sin(\alpha_k t) - c_{34k}^0 \cos(\alpha_k t) \right);$$

$$c_{34k}^0 = -\frac{2}{\alpha_k l} \left(\frac{\varepsilon \omega_k R_{sk}}{2} c_{33k}^0 + c_{4k}^0 \right);$$

$$c_{33k}^0 = \frac{2l(1 - \sin(k\pi))}{(2k-1)\pi} f_{1x}; \quad c_{4k}^0 = \frac{2l(1 - \sin(k\pi))}{(2k-1)\pi} f_{2x}.$$

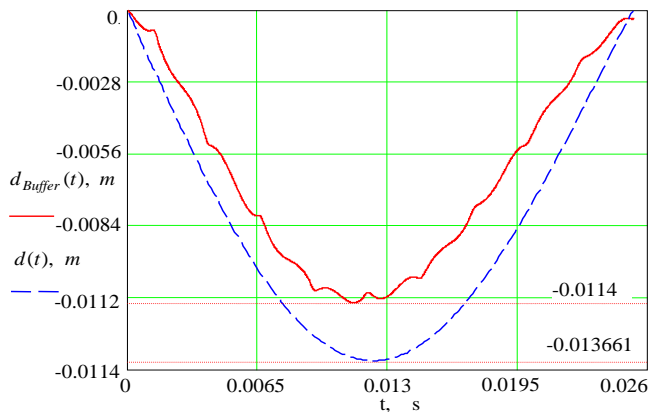


Фиг. 1. Резултати от моделиране на ударния импулс (разпределението на ударната сила за времето на удара) със зависимостта (4). Гумен буфер със сферична челна повърхнина (RB-R040) при енергийно натоварване на единица обем $\delta E = 13508 \text{ J/m}^3$ и скорост на удара $v_1 = 0.602 \text{ m/s}$ - експериментална \tilde{F}_{IMP} и аналитична F_{IMP} крива. Коэффициент на корелация $r = 0.9985$.



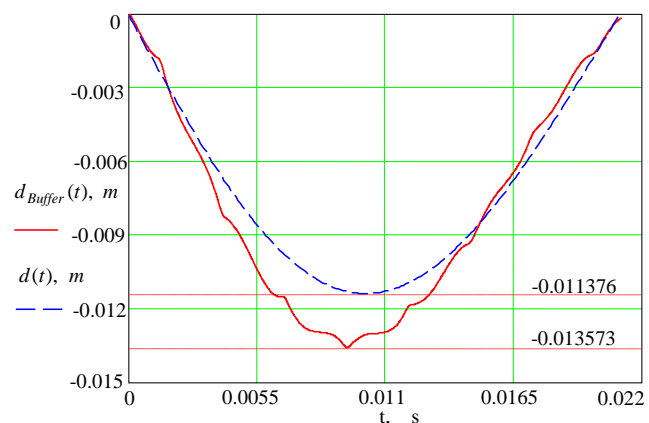
Фиг. 2. Преместване $d_{Buffer}(t)$, m на челната повърхнина възприемаща удара при удар с гумен буфер (RB-R040) със сферична челна повърхнина с радиус 40mm и преместване на удряцото се в него твърдо тяло $d(t)$, m.

Енергийно натоварване на единица обем от буфера $\delta E = 13508 \text{ J/m}^3$, скорост на удара $v_1 = 0.602 \text{ m/s}$.



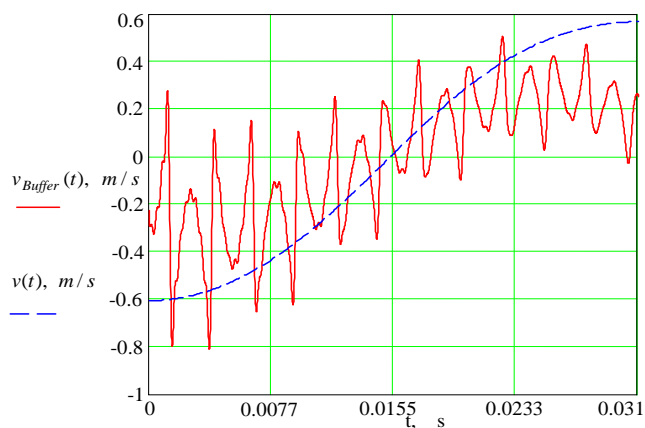
Фиг. 3. Преместване $d_{Buffer}(t)$, m на челната повърхнина възприемаща удара при удар с гумен буфер (RB-R040) със сферична челна повърхнина с радиус 40mm и преместване на удряцото се в него твърдо тяло $d(t)$, m.

Енергийно натоварване на единица обем от буфера $\delta E = 108679 \text{ J/m}^3$, скорост на удара $v_1 = 1.768 \text{ m/s}$.



Фиг. 4. Преместване $d_{Buffer}(t)$, m на челната повърхнина възприемаща удара при удар с гумен буфер (RB-R120) със сферична челна повърхнина с радиус 120mm и преместване на удряцото се в него твърдо тяло $d(t)$, m.

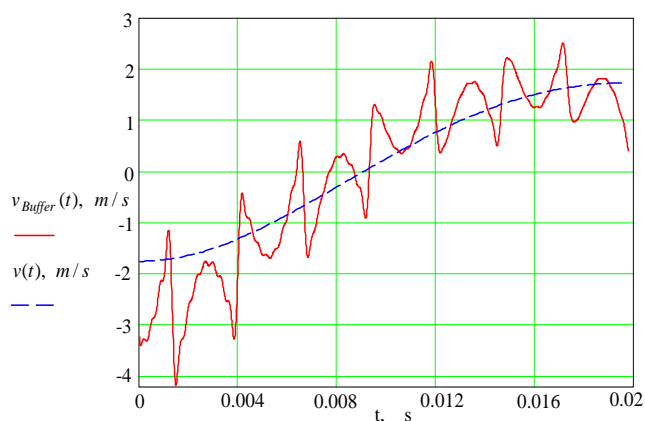
Енергийно натоварване на единица обем от буфера $\delta E = 108679 \text{ J/m}^3$, скорост на удара $v_1 = 1.768 \text{ m/s}$.



Фиг. 5. Скорост $v_{\text{Buffer}}(t)$, m/s на челната повърхнина възприемаща удара при удар с гумен буфер (RB-R040) със сферична челна повърхнина с радиус 40mm и скорост на удрящото се в него твърдо тяло $v(t)$, m/s .

Енергийно натоварване на единица обем от буфера

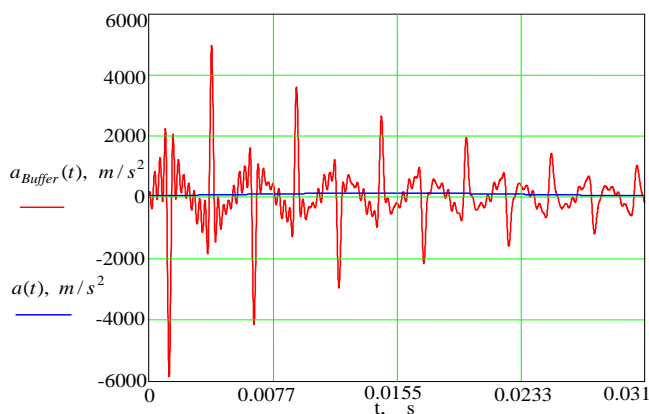
$$\delta E = 13508 \text{ J/m}^3, \text{ скорост на удара } v_1 = 0.602 \text{ m/s}.$$



Фиг. 6. Скорост $v_{\text{Buffer}}(t)$, m/s на челната повърхнина възприемаща удара при удар с гумен буфер (RB-R040) със сферична челна повърхнина с радиус 40mm и скорост на удрящото се в него твърдо тяло $v(t)$, m/s .

Енергийно натоварване на единица обем от буфера

$$\delta E = 108679 \text{ J/m}^3, \text{ скорост на удара } v_1 = 1.768 \text{ m/s}.$$



Фиг. 7. Ускорение $a_{\text{Buffer}}(t)$, m/s^2 на челната повърхнина възприемаща удара при удар с гумен буфер (RB-R040) със сферична челна повърхнина с радиус 40mm и ускорение на удрящото се в него твърдо тяло $a(t)$, m/s^2 .

Енергийно натоварване на единица обем от буфера

$$\delta E = 13508 \text{ J/m}^3, \text{ скорост на удара } v_1 = 0.602 \text{ m/s}.$$

4. Заключение

Въз основа на данните, получени с натурен експеримент на удар на гумени буфери с конична форма и сферична челна повърхнина и моделираното ударно въздействие на твърдото тяло върху буфера са определени преместването, скоростта и ускорението на буфера и в частности на челната повърхнина, възприемаща удара. При моделирането на удара е изходено от едномерното вълновото уравнение, като е реализиран модел на конзолно закрепен вискоеластичен прът с разпределени параметри. Моделът е с доказана адекватност ([3], [4]) при малки премествания. Въз основа на данните, получени от числените експерименти за поведението на буфера при удар на твърдо тяло с гумени буфери със сферична челна повърхнина RB-R040 и RB-R120 и сравнението им с данните за преместването, скоростта и ускорението на удрящото се в тях твърдото тяло, получени от натурен експеримент могат да се направят следните изводи:

1. Преместването на челната повърхнина на буфера, върху чиято крива се наблюдават наложените трептения, вследствие движението на вискоеластичната вълна в буфера, се отличава в различна степен от преместването на твърдото тяло, като разликата при буфер с радиус на сферичната повърхнина $R=40\text{mm}$, което е гранична стойност за този вид конични буфери (RB-R040) и малка стойност на енергийно натоварване $\delta E = 13508 \text{ J/m}^3$ е приблизително два пъти. При големи стойности на енергийно натоварване на единица обем от буфера $\delta E = 108679 \text{ J/m}^3$ тази разлика намалява до около 20%. Същото може да се наблюдава и от графиките за скоростта на челната повърхнина и скоростта на твърдото тяло. За другия изследван буфер с радиус на сферичната повърхнина $R=120\text{mm}$ (RB-R120) отбелязаната по горе разлика намалява и резултатите се доближават до тези за буфер с плоска челна повърхнина;

2. Скоростта на челната повърхнина, възприемаща удара се различава съществено от скоростта на твърдото тяло и за двата изследвани буфера, като се колебае спрямо нея и бележи тренд, наподобяващ скоростта на удрящото се в буфера твърдо тяло. Разликите между тренда и скоростта на твърдото тяло са по-съществени за буфер RB-R040 при ниско ниво на енергийно натоварване;

3. Ускорението на челната повърхнина и за двата изследвани буфера се отличава съществено от ускорението на твърдото тяло и се колебае спрямо него, като се наблюдава процесът на затихване на трептенията към края на удара.

4. Литература

- [1] Голдсмит В. Удар – теория и физическите свойства соударяемых тел. М., Изд. Л-ры по строительству, 1965, 448с.
- [2] Лавендел Э. Э., Абросимов Г. Э. Решение задачи об ударе абсолютно жестким телом по вязкоупругому стержню конечной длины. Всесоюзная Н. Т. конференция по методам расчета вискоеластичных материалов. Рига, 1977, 156 с.
- [3] Митев Н. Аналитично изследване поведението на образци от вискоеластични материали подложени на импулсно външно въздействие. trans & MOTAUTO' 06, Варна;
- [4] Митев Н. Аналитично определяне на свободните надлъжни колебания на образци от вискоеластични материали вследствие от импулсно външно въздействие. trans & MOTAUTO' 06, Варна;
- [5] Митев Н. Изследване удара на твърдо тяло с гумен буфер (Моделиране на материалните свойства и ударния импулс) Трета международна научно техническа конференция „Техника. Технологии. Образование. Сигурност“, В. Търново, 2015 г.;
- [6] Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегралных неравенства и теория нелинейных колебаний. М., Наука, 1976, 152 с.