НОВА ФОРМУЛА ЗА ПРЕСМЯТАНЕ НА ЖИРОСКОПНИЯ ВЪРТЯЩ МОМЕНТ И ВРЪЗКАТА СЪС СПИНА НА ЕЛЕКТРОНА

NEW FORMULA TO CALCULATE THE GYROSCOPIC TORQUE AND ITS RELATION TO THE SPIN OF ELECTRON

Инж. Джорджев Б.
Независим изследовател, България
bojidardj@dir.bg

Abstract: *Classical Mechanics explains the gyroscopic torque generated about axis Z perpendicular to the axes of rotation X and turning Y by means of vector multiplication. It shows a linear dependence on the proportion between the angular speeds of turning and rotation. The paper suggests a new way to explain and calculate the gyroscopic torque based on the understanding that it is a product of the inertial effect of the changed direction of the orbiting masses in the plane of turning. It shows that the magnitude of the gyroscopic torque depends on the sine function of the proportion between the angular speeds of turning and rotation. We compare the new formula to the one of the vector multiplication. The sine function demonstrates that no gyroscopic torque is generated if the angular speed of rotation is 1/2 of the one of turning. Possibly, it corresponds to the 1/2 spin of electron. We suppose some basic developments.*

Keywords: CLASSICAL MECHANICS, VECTOR MULTIPLICATION, GYROSCOPIC TORQUE, SPIN OF ELECTRON

1. Увод

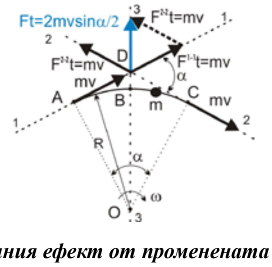
Всяко тяло, което се върти около ос X с ъглова скорост ω_r и се завърта около перпендикулярна ос Y с ъглова скорост ω_t, генерира въртящ момент около оста Z перпендикулярна на първите две. Класическата механика обяснява феномена чрез векторно умножение на векторите на ъгловия момент на въртене и на ъгловата скорост на завъртане и това е обяснено във всеки учебник по механика и физика, например на Feynman [1]. Величината на генерирания въртящ момент τ_{vm} около Z е равна на произведението от модулите на векторите и показва във вида (1) линейна звисимост от сътношението между ъгловите скорости на завъртане и въртене.

$$\tau_{vm} = J\omega_r\omega_t = J\omega_r^2\frac{\omega_t}{\omega_r} \qquad (1)$$

Както Feynman обяснява в [1], векторното умножение е подчинено на специални правила. Линейната зависимост на (1) от съотношението ω_t/ω_r не свързва векторното умножение с други феномени от Физиката, като например спина на елементарните частици.

2. Инерционния ефект на променената посока като предпоставка и начин за решаване на проблема

Авторовият опит показва, че жироскопният въртящ момент е резултат от инерционния ефект на променената посока на въртящите се маси в равнината на завъртането. Въпреки че разсъжденията не са нови, нека накратко да изведем величината на ефекта.



Фиг. 1 Инерционния ефект от променената посока

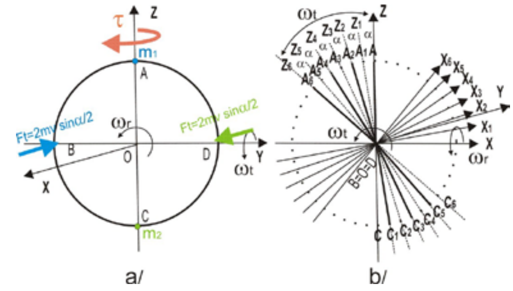
Нека маса m се движи по дъгата ABC, Фиг.1, с постоянна скорост v и радиус R около точка O. Ъгъла α между тангентите 1-1 и 2-2 към точките A и C е равен на ъгъла на променената посока при движение. Нека, вместо по дъгата, масата от точка A се движи по 1-1. Прилагаме от фундамента към масата импулс $F^{1-1}t=mv$ така, че тя спира в точка D. След това прилагаме $F^{2-2}t=mv$ по 2-2 така, че масата да достигне скорост v в точка C. Очевидно, инерционният ефект Ft от променената с ъгъл α посока е равен на векторната сума на $F^{1-1}t$ с равната и противоположна на $F^{2-2}t$ реакция. Решавайки уравнението получаваме израз за импулса на променената посока (2).

$$Ft = 2mv\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

Изразът (2) не е нов, той се използва например при пресмятане на Ръдърфордовото разпиляване, виж уравнения (2) и (3) от [2], където импулсът от променената посока е равен на интеграла на всички елементарни импулси на центробежната сила. От друга страна, замествайки t с Δt и α с $\Delta\alpha$, и вземайки предвид, че синус от малък ъгъл е равен на ъгъла, получаваме известната формула за центробежната сила $F_c=mR\omega^2$.

3. Решаване на научния проблем чрез създаване на новата формула за жироскопния въртящ момент

За всеки π период на въртене елементарна маса m_1 от тяло въртящо се с постоянна скорост ω_r около ос X, Фиг.2, напуска точка A и пристига в т. C описвайки дъгата ABC. Всяка маса m_2 от т. C пристига в т. D описвайки дъгата CDA. Тоест, масите се движат по прави линии ABC и CDA в равнината на завъртане, перпендикулярна на оста Y. Но ако в същото време оста X се завърта около Y с ъглова скорост ω_t, масите ще пристигнат в точките C_1 и A_1 в пространството, вместо в C и A, описвайки триизмерни дъги. Тоест, те описват двумерните дъги ABC_1 и CDA_1 в равнината на завъртане. През следващия π период m_1 описва C_1DA_2 докато m_2 описва A_1BC_2 и така нататък. В съответствие с (2) импулси от променената посока (в синьо и зелено) на орбитиращите маси в равнината на завъртане се генерират в точките B и D. Тъй като дъгите A_nBC_{n+1} и C_nDA_{n+1} са с противоположна изпъкналост, то и импулсите са взаимно противоположни. Но тъй като те действат на противоположни спрямо оста Z точки, те създават еднопосочни моменти на импулси относно оста Z.



Фиг. 2 Жироскопния ефект а/ в равнината на въртене b/ в равнината на завъртане

Това обяснение съответства на разбирането на Feynman от Фиг. 20-4 от [1], където “before” е положението на масата m_1 в т. A_n “now” е в т. B, “after” е в т. C_{n+1}. “Before” на m_2 е в т. C_n, “now” е в т. D, а “after” е в т. A_{n+1}.

Това означава, че импулсите (2) се отделят в точките B и D периодически, на порции за всеки π или половин период на въртене на масата около оста X. Наричаме този феномен π-квантуване или половин, или една-половина квантуване. Нека да пресметнем жироскопния въртящия момент τ_{new} според новите разбирания за неговата природа. Ако за един π-квант (половин оборот около X) масата m_1 описва дъгата A_nBC_{n+1}, то за следващия π-квант тя описва $C_{n+1}DA_{n+2}$, и така нататък. Масата описва даден брой дъги за секунда. При всяка описана дъга се отделя импулс (2) в точките B или D перпендикулярно на равнината на въртене. Броят на π-квантите за секунда е равен на броя на описаните дъги, което е равно на броя N_π на генерираните импулси (2) за секунда. Пресмятаме N_π разделяйки ъгловата скорост на въртене ω_r на π в (3). После разделяйки ъгловата скорост на завъртане ω_t на броя на π-квантите за секунда N_π, получаваме ъгъла на пречупване α на орбиталнния момент в равнината на завъртане за всяка описана дъга (π-квант) (4). Замествайки (4) в (2) и умножавайки двете страни с радиуса R получаваме величината на момента на импулса за един π-квант (5). Умножавайки двете страни с броя на π-квантите за секунда N_π (3) получаваме величината на генерирания въртящ момент τ_{new} от една маса (6).

$$N_\pi = \frac{\omega_r}{\pi} \tag{3}$$

$$\alpha = \frac{\omega_t}{N_\pi} = \frac{\pi\omega_t}{\omega_r} \tag{4}$$

$$FtR = 2mvR\sin\frac{\pi\omega_t}{2\omega_r} \tag{5}$$

$$\tau_{new} = FtRN_\pi = \frac{2}{\pi}mvR\omega_r\sin\frac{\pi}{2}\frac{\omega_t}{\omega_r} \tag{6}$$

Заместваме орбиталната скорост с $v=\omega_rR$ в (7). После заместайки инерционния момент на точкова маса $J=mR^2$ получаваме новата формула за жироскопния въртящ момент (8). Формата (9) показва зависимостта на τ_{new} от кинетичната енергия на въртене E_{kr}.

$$\tau_{new} = \frac{2}{\pi}mR^2\omega_r^2\sin\frac{\pi}{2}\frac{\omega_t}{\omega_r} \tag{7}$$

$$\tau_{new} = \frac{2}{\pi}J\omega_r^2\sin\frac{\pi}{2}\frac{\omega_t}{\omega_r} \tag{8}$$

$$\tau_{new} = \frac{4}{\pi}E_{kr}\sin\frac{\pi}{2}\frac{\omega_t}{\omega_r} \tag{9}$$

4. Резултати и дискусии

И така, имаме две формули за жироскопния въртящ момент, тази определена от векторното умножение (1), и новата (8) или (9) определена чрез пресмятане на инерционния ефект от променената посока. Нека да ги сравним.

4.1 Първа проверка

Нека да сравним как работят формулите на векторното умножение (1) и новата (8) и при различни съотношения ω_t/ω_r, приемайки, че инерция момент на хипотетичното тяло е равно на едно (J=1) в Таблица 1. Дименсиите на τ_{vm} и τ_{new} не са дадени, защото крайната цел е пресмятането на относителната разлика в проценти d_r в последната колона. Откриваме, че пресметнатите по двете формули резултати са с пренебрежимо малка разлика, ако ъгловара скорост на въртене е много по-голяма от тази на завъртане $\omega_r>>\omega_t$.

Таблица 1: *Относителната разлика между резутатите пресметнати по формулите на векторното умножение и новата, за различни съотношения между ω_t/ω_r..*

$\frac{\omega_t}{\omega_r}$	τ_{vm}	τ_{new}	$d_r = \frac{\tau_{vm}-\tau_{new}}{\tau_{vm}}100,\%$
$\frac{1}{10000}$	10000	9999.99995	0.00000047
$\frac{1}{1000}$	1000	999.99959	0.0000412
$\frac{1}{100}$	100	99.9959	0.0041
$\frac{1}{10}$	10	9.959	0.41
$\frac{1}{1}$	1	0.637	36.34

4.2 Втора проверка

Нека да опитаме да намерим условието, при което двете формули пресмятат равни резултати. Приравняваме (1) и (8), в (10). После, умножавайки двете страни на (10) с $(\pi/2\omega^2_r)$, получаваме (11). Заместайки израза за ъгъла на пречупване (4), получаваме (12).

$$J\omega_r^2\frac{\omega_t}{\omega_r} = \frac{2}{\pi}J\omega_r^2\sin\frac{\pi}{2}\frac{\omega_t}{\omega_r};\left(\frac{\pi}{2\omega_r^2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\omega_t}{\omega_r} = \sin\frac{\pi}{2}\frac{\omega_t}{\omega_r} \tag{11}$$

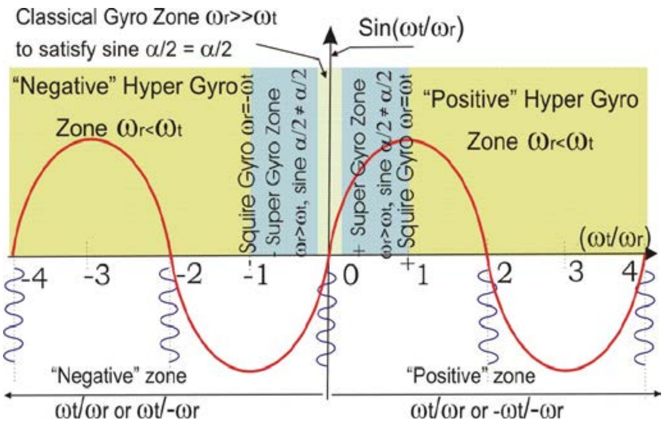
$$\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \tag{12}$$

Тригонометричното условие (12) показва, че двата метода пресмятат равни резултати, ако синус от половината на ъгъла на пречупване на орбиталния момент в равнината на завъртане за всеки π-квант, е равен на половината от ъгъла на пречупване. Равенството (4) показва, че условието се изпълнява само ако ъгловата скорост на въртене е много по-голяма от тази на завъртане $\omega_r>>\omega_t$. Наричаме (12) Класическо жироскопно условие, защото то определя общия обхват на двете формули. Очевидно е, че случаи когато ъгловата скорост на въртене е само по-голяма от тази на завъртане $\omega_r>\omega_t$, когато $\omega_r=\omega_t$ и $\omega_r<\omega_t$ стоят извън обхвата на векторното умножение тъй като то пресмята точен резултат само ако условието (12) е удовлетворено. От друга страна, синусовата функция и респективно новата формула, пресмятат точен резултат при всички спучаи, независимо от големината на ъгъла на пречупване. Следователно, условието (12) не представлява ограничение на свойствата на жироскопа, то е ограничение метода на векторното умножение да обясни тези свойства.

4.3 Анализ на синусовата функция

От новата формула (9) се вижда, че величината на генерирания жироскопен въртящ момент, е право пропорционална на кинетичната енергия на въртенето около оста X и на значението на синусовата функция на ъгъла на пречупване. От своя страна, ъгълът на пречупване се определя от съотношението между ъгловите скорости на завъртане около Y и на въртене около X. Очевидно е, че качественото поведение на жироскопа при дадена скорост (кинетична енергия) на въртене, се определя от синусовата функция на съотношението

$\omega_t/\omega_т$. Фиг. 3 показва промяната на синусовата функция в примерен интервал $-4<\omega_t/\omega_т<4$.



Фиг. 3 *Анализ на функцията* $\sin(\omega_t/\omega_r)$.

Синусовата функция приема стойност нула и затова генерираният жироскопен въртящ момент е равен на нула, ако $\omega_t=0$. Това определя така наречената Централна или Класическа нула. Надясно от Централната нула се намира зоната на положителното съотношение между ъгловите скорости на завъртане и въртене $\omega_t/\omega_т$. Наляво е зоната на отрицателното $\omega_t/\omega_т$. Тънката лента от двете страни на Централната нула определя зоната на Класическия жироскоп, където Класическото жироскопно условие (12) е удовлетворено. Квадратният жироскоп се определя от условието за равенство между ъгловите скорости на завъртане и въртене, тоест $\omega_t/\omega_т$ е равено на плюс/минус едно. Супер жироскопът заема положителни и отрицателни зони (в синьо) между Квадратния и Класическия жироскоп, където съотношението между двете ъглови скорости е по-малко от едно, но не е достатъчно малко, за да спази Класическото жироскопно условие (12). Очевидно, Хипер жироскопа (в зелено) отговаря на условието $\omega_t/\omega_т>1$.

Синусовата функция приема максимална стойност от едно при Квадратния жироскоп когато ъгловите скорости на въртене и завъртане са равни. Физическото обяснение е, че за всеки половин оборот около X (π-квант) равнината на въртене се завърта на половин оборот около Y, перпендикулярно на страницата от Фиг. 2b. Ще рече, че всяка маса m_1 (или m_2), напускаща точка A_n (или C_n) в пространството, пристига в същата точка A_n (или C_n) описвайки триизмерната дъга A_nBA_n (C_nDC_n) с максималния възможен ъгъл на пречупване равен на π. Отвъд тази точка на съотношение, реалният ъгъл на пречупване намалява. Можем да отбележим, че синусовата функция е също равна на едно, ако ъгловата скорост на завъртане е +/-3, +/-5, +/-7… пъти по-голяма от тази на въртенето, тоест ако $\omega_t/\omega_т$ приема цели положителни или отрицателни нечетни стойности (числа).

Както споменахме, всеки път когато функцията пресича абсцисата, генерирания въртящ момент става нулев. Тоест, жироскопът е стабилен, защото той не губи енергия, за да генерира жироскопен въртящ момент, тоест той е в потенциална яма. Функцията приема нула ако $\omega_t/\omega_т=0$, +/-2, +/-4,… тоест ако $\omega_t/\omega_т$ приема нула или положителни или отрицателни четни числа. Но има някои разлики. Ако $\omega_t=0$ при Централната (Класическата) нула, жироскопът запазва ориентацията на равнината си на въртене в пространството. Това е добре известно свойство използвано в жирокомпасите. Но ако $\omega_t=+/-2\omega_r$, $\omega_t=+/-4\omega_r$ и така нататък, жироскопът не генерира въртящ момент, въпреки че равнината на въртене се завърта около оста на завъртане. Физическото обяснение на феномена е, че ако ъгловата скорост на въртене е равна на нула, в рамката на всеки π-квант, всяка елементарна маса се движи по линията A_nBC_n (или C_nDA_n) в равнината на завъртане, Фиг.2 b. Затова ъгълът на пречупване е равен на нула и генерираният въртящ момент е също нулев. Но ако ъгловата скорост на завъртане е два (четири, шест...) пъти по-голяма от тази на въртене, за всеки π-квант масата извършва пълен оборот (или 2, или повече) около оста на завъртане. Това прави така, че масата от точка A_n пристига в точка C_n (от C_n в A_n) също както ако ъгловата скорост на завъртане е равна на нула, тоест ако ъгъла на пречупване е равен на нула. Така, при Хипер нулите не се генерира жироскопен въртящ момент относно оста Z и степените на свобода на жироскопа са изолирани, въпреки че тялото се върти около X и едновременно се завърта около Y.

От друга страна, смущение идващо отвън може да предизвика трептения около "нулите" Например, известна е нутацията като колебание около Централната (Класическата) нула. Подобни колебания могат да бъдат правокирани и около Хипер нулите. Но ако колебание около Централната нула се изразява в колебание на равнината на въртене, то колебание около Хипер нулите представлява колебание на съотношението $\omega_t/\omega_т$. Фактически всяко отклонение на съотношението в "положителна" или "отрицателна" посока свързва степените на свобода по съответния начин.

4.4 Възможна връзка със спина на електрона

Според съществуващата Квантова теория, както например е обяснено в [3] и [4], заредените частици (фермиони, лептони, включително електрони) са със спин 1/2. Незаредените частици (бозони) са със спин 1. Фермионите с други спинове включително 3/2 и 5/2 и бозони с други спинове като 0, 2 и 3 не са известни да съществуват, въпреки че са теоретично предсказани. През 2013 Хигс бозона със спин 0 бе доказано, че съществува. Всичко това намалява възможните спинове до само няколко: 0, 1/2 и 1.

Какво е спина? Например Shankar, в [3], глава.14 пише: *[It follows that electron has "intrinsic" angular momentum not associated with its orbital motion. This angular momentum is called spin, for it was imagined in the early days that if the electron has angular momentum without moving through space, then it must be spinning like a top. We adopt this nomenclature but not the mechanical model that goes with it, for a consistence mechanical model doesn't exist.]* В превод на Автора: *[Следва, че електронът има "вътрешно присъщ" ъглов момент, който не е свързан с орбиталното движение. Този ъглов момент е наречен spin (въртене), поради представата от ранните дни, че ако електронът има ъглов момент без да се движи в пространството, то той трябва да се върти като пумпал. Ние възприемаме тази терминология, но не и маханичния модел, който се подразбира от нея, защото той не съществува.]* Norbuly, [4] глава.10.4 казва: *[As nicely explained … this angular momentum is intrinnsic to the electron and does not arise from orbit effects.] [Както най-добре може да бъде обяснено...този ъглов момент е свойствен за електрона и не възниква от отбитални ефекти.]*

Можем ли да свържем свойството на 1/2 спина със свойствата на Хипер нулите от Фиг.3 и зависимостта (8)? Ако приемем, че спинът на електрона е негово физическо въртене около някаква негова ос с ъглова скорост 1/2 от скоростта на завъртане около перпендикулярна ос, то той не генерира въртящ момент около ос перпендикулярна на първите две. Тоест, електронът действа като Хипер жироскоп със съотношение $\omega_t/\omega_т=+/-2$. Такъв електрон съществува в потенциална яма, защото степените на свобода не са свързани и електронът, или всъщност системата електрон-ядро, не губи кинетична енергия, за да генерира жироскопичен въртящ момент около третата ос. Фактически, спинът на електрона e_{spin} е реципрочен на съотношението $\omega_t/\omega_т$ от (8) и (9) в Хипер нулите +2 и -2, (13).

$$e_{spin} = \frac{\pm\omega_r}{\pm\omega_t} = \pm\frac{1}{2} \qquad (13)$$

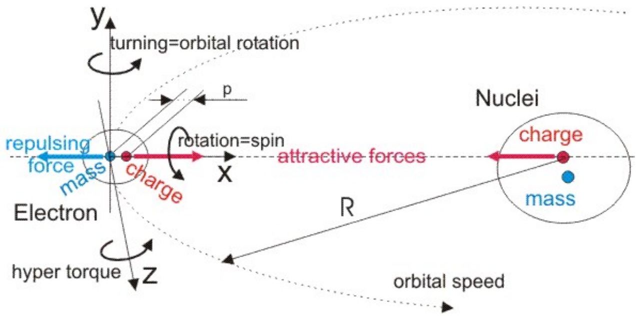
Подкрепени от горния анализ ние, се връщаме към оригиналното разбиране, че електронът се върти като пумпал, когато феномена на спина бил открит.

4.5 Проблема на вътрешно присъщата (главната, основната) ос

Както приехме, спинът представлява единично физическо въртене около ос. От друга страна, жироскопът работи, ако са налице две въртения (или въртене и завъртане според Авторовата терминология) около перпендикулярни оси, водещи до генериране на въртящ момент около третата ос. Всяко въртене се нуждае от ос, за да бъде определено, така свойствения спин изисква ясно дефинирана свойствена ос.

Незаредените частици се въртят около дадена ос свободно. Те получават завъртане около перпендикулярна ос, предизвикващо жироскопен ефект, в специални случаи, като например сблъскване или дифракция. За разлика от тях, заредените частици нормално съществуват в система, свързани с противоположно заредени частици заради силите на привличане. Те се въртят (spin) свободно само когато поради някакви причини загубят системата. Затова, съществувайки в система с ядрото, електронът получава второ движение принадлежащо на системата в добавка към свойствения му спин.

От друга страна, при +2/-2 Хипер нулите скоростта на завъртане е два пъти по-голяма от тази на въртене, което означава, че кинетичната енергия на завъртане е четири пъти по-голяма от тази на въртенето (за сферично тяло). Затова, електронът може лесно да превключи осите на спин (въртене) и на завъртане. Това не може да се случи, ако оста на спина на електона е ясно определена от вътрешно присъщите му качества.



Фиг. 4 *Система електрон-ядро*

Горните условия/изисквания могат да бъдат удовлетворени, ако допуснем, че центровете на заряд и на маса на електрона са разделени на някакво разстояние "p", Фиг. 4. Центровете на заряд и на маса на ядрото са също разделени, но тъй като ядрата на различните химически елементи и изотопи се състоят от различен брой протони и неутрони, техните центрове са разделени на различни разстояния. Очевидно свойствената ос на електрона е тази, преминаваща през центровете му на маса и заряд. Кулоновата сила на привличане насочва центъра на заряд на електрона към центъра на заряд на ядрото, докато действащата на центъра на маса на електрона центробежна сила го насочва противоположно. Силите правят така, че трите центъра да се намират нормално в линия. Тъй като центърът на заряд на електрона е насочен винаги към ядрото, електронът извършва едно завъртане около оста Y перпендикулярна на орбиталната равнина всеки път когато извършва един оборот около ядрото. Следователно, ако в същото време електронът извърши половин оборот (спин) около свойствената си ос, то той действа като Хипер жироскоп в една от потенциалните ями на Хипер нулите +2 или -2. Оста на спина не може да бъде разменена с друга, защото тя е необратимо определена от вътрешно присъщите свойства на електрона.

Спинът се измерва не с радиани за секунда, а като стриктно една-втора съотношение между ъгловите скорости на спина и на орбитата. Можем да открием, че всяка от +2 и -2 Хипер нулите заемани от горния (spin-up) и долния (spin-down) спинове предполага по две комбинации от посоките на ъгловите скорости, които според традицията можем да определим като ляв и десен.

4.6 Някои основи на динамиката на електрона

Ако например, поради някаква причина, орбитата на електрона се намали с радиус ΔR, това увеличава ъгловата скорост около ядрото, тоест увеличава ъгловата скорост на завъртане около оста Y с $\Delta\omega_t$, увеличавайки орбиталния момент/ъглов момент. Съотношението $\omega_t/\omega_т$ става по-голямо от две, тоест спинът става по-малък от една-втора от орбитата. Електронът излиза от дадената Хипер нула (потенциална яма) и започва да генерира Хипер въртящ момент в съответствие с връзките (8) и (9). Въртящият момент е "положителен" или "отрицателен" в зависимост от това от коя Хипер нула се излиза. Той действа по оста Z, преминаваща през центъра на маса на електрона, Фиг. 4. Той измества центъра на заряд на електрона извън линията, свързваща центровете на маса на електрона и на заряд на ядрото и го принуждава да извършва периодични движения зависещи от π–квантуването. Вероятно това е свързано с излъчване на електромагнитна вълна. От друга страна, електромагнитна вълна, "атакуваща" електрона отвън, кара центъра му на заряд да извършва подобни периодични движения.

Можем да наречем феномена на спин-орбитално инерционно взаимодействие спин-орбитално инерционно сдвояване. От друга страна, орбиталният и спиновият магнитни моменти взаимодействат помежду си, както и с външно магнитно поле (ефекта на Zeeman), така че е налице и спин-орбитално магнитни сдвояване. Фактически, спинът и орбитата се сдвояват по два начина, инерциално и електромагнитно. Заедно работят в система. Има много детайли. Но накратко, знаем, че всяка система извадена от своето равновесие, се стреми да го възстанови. Единственият начин, по който инерционната система електрон-ядро може да възстанови своето равновесие, е като доведе съотношението между ъгловите скорости на спин и на орбита до естествената му стойност от една-втора. Как инерционното и електромагнитно сдвояване работят заедно, за да възстановят равновесието? Може ли тези разсъждения да правокират следващи развития?

5. Заключение

Новият метод за пресмятане на жироскопния въртящ момент кореспондира с Нютоновите закони на динамиката и със спина на елементарните частици.

6. Литература

[1] Feynman, R. P., The Feynman's Lectures on Physics, 2nd printing, California Institute of Technology, November 1964, Volume 1, Chapter 20, page 20-4.

[2] Lindholm A. and others, Rutherford Backscattering, Laboratory manual, Uppsala University, Department of Nuclear and Particle Physics; https://studentportalen.uu.se/uusp-filearea-tool/download.action?nodeId=81305&toolAttachmentId=36717

[3] Shankar, R. Principles of Quantum Mechanics, 2nd ed. Yale University, New Haven, Connecticut, Kluwer Academic/Plenum Publisher, New York, 1994, Chap. 14

[4] Norbily, J. Quantum Mechanics, Physics Department, University of Wisconsin-Milwaukee, November, 20, 2000, Chap. 10-4