

# SYSTEMS AMORTIZATIONS WITH DISCRETE SWITCHING OF ELASTIC ELEMENTS

Prof. Dr. Kalashnikov B.

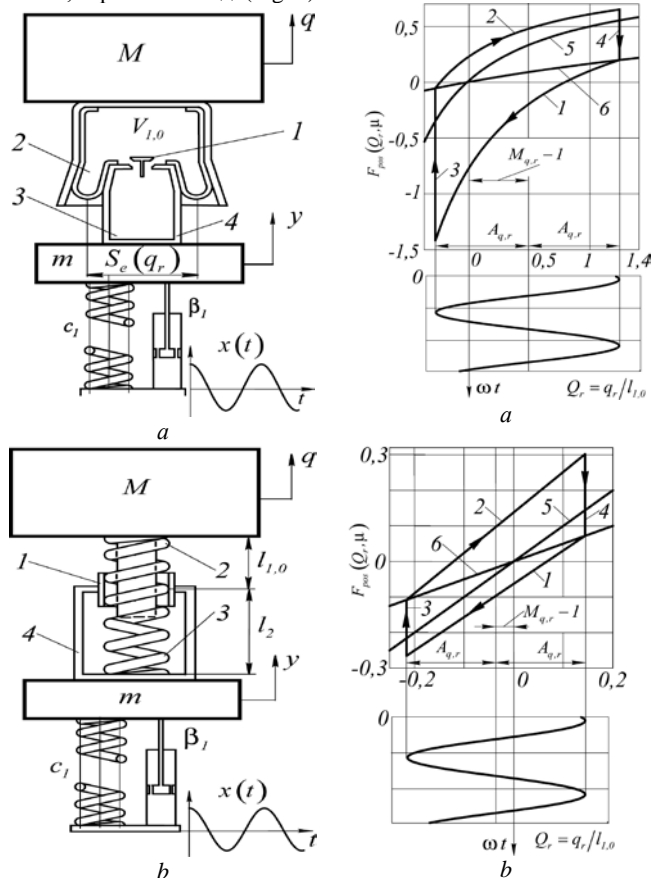
Aircraft and Rocket Production Chair – Omsk State Technical University, Russia

**Abstract:** Для уменьшения динамических воздействий предлагаются системы амортизации с дискретной коммутацией частей, идея построения которых заключается в разделении упругих элементов с малой собственной диссипацией на аккумулирующую и деформируемую части и в их дискретной коммутации в моменты времени, соответствующие амплитудным положениям объекта.

**Keywords:** DISCRETE SWITCHING OF PARTS OF THE ELASTIC ELEMENTS, MIXED PIECEWISE CHARACTERISTIC OF POSITIONAL FORCE, RELATIVE DAMPING RATIO, PERIODIC SHIFT OF THE STATE OF STATIC EQUILIBRIUM, THE SURFACE OF AMBIGUOUS CONNECTION PARAMETERS, FREQUENCY-INDEPENDENT ENERGY DISSIPATION

## 1. Introduction and Problem Formulation

Для защиты ряда объектов современной техники целесообразно иметь в системах амортизации (СА) гиперболический тип частотной зависимости коэффициента относительного затухания. При этом должно быть достигнуто увеличение этого коэффициента в зоне низкочастотного резонанса до значения (0,45..0,5) [1]. Такой тип этой зависимости можно обеспечить путём весьма быстрого наложения-снятия жёсткой связи на часть упругого элемента, осуществляемым в окрестности амплитудных положений объекта. В качестве элементов могут применяться пневмоэлементы или твёрдые деформируемые тела: пружины, торсионны и т. д. (Fig. 1).

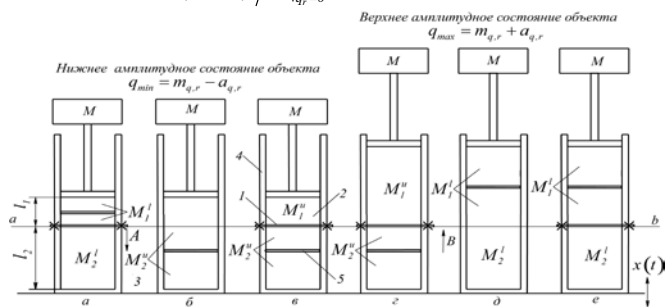


**Fig. 1.** Схемы СА с ДК частей: (а) – пневмоэлемента; (б) – элемента из твёрдых деформируемых тел; 1 – коммутатор; 2 – деформируемая часть; 3 – аккумулирующая часть; 4 – жёсткая оболочка

**Fig. 2.** Характеристики позиционной силы части 2: (а) – пневмоэлемента; (б) – элемента из твёрдых деформируемых тел; 1, 2 – линии нагружения и разгрузки; 3, 4 – вертикали коммутации; 5, 6 – характеристики восстаивающей силы деформируемой части и обеих частей в моменты коммутации

Несмотря на это различие, обусловленное физическими свойствами рабочих тел двух рассматриваемых типов упругих элементов, явление массопереноса между частями в изотермическом процессе описывается одинаково. Вследствие этого оба типа СА с ДК частей упругих элементов на Fig. 1, а; 2, а заменяются обобщённой моделью (Fig. 3), на которой накладываемая реономная связь представляется жёсткой оболочкой 4 и жёстким съёмным диском 1 (Fig. 3, в), заменяющим коммутаторы 1 на Fig. 1.

В состоянии статического равновесия безразмерная суммарная масса рабочего тела (газа или твёрдого деформируемого тела)  $M_{\Sigma} = M_{1,0} + M_{2,0} = I + \mu$  распределяется между частями в некотором отношении  $\mu = M_{2,0}/M_{1,0} = l_2/l_{1,0}$ . Для схемы на Fig. 1, а длина столба газа деформируемой части находится по выражению  $l_{1,0} = V_{1,0}/S_e|_{q_r=0}$ .



**Fig. 3.** Обобщённая динамическая модель СА с ДК частей упругих элементов

Распределение массы рабочего тела между частями при периодических колебаниях осуществляется путём наложения связи – установки диска 1 и жёсткого соединения его с оболочкой 4 всегда в одном и том же положении объекта (на прямой  $ab$  на Fig. 3).

В нижнем и верхнем амплитудных состояниях объекта связь освобождается (удаляется диск 1), происходит смещение поршня (или метки) 5 вниз или вверх (по стрелке  $A$  или  $B$ ), после чего связь опять накладывается (Fig. 3, в или 3, е).

Процессы выравнивания сил в этой модели являются типично необратимыми процессами и, соответственно, сопровождаются производством энтропии за счёт внутренних источников [2].

Если в качестве рабочего тела в схеме на рис. 3 принять газ, то уравнением состояния будет уравнение Клапейрона-Менделеева, а если твёрдое деформируемое тело, то закон Гука. В обоих случаях характеристика позиционной силы является неоднозначной: в первом случае кусочно-нелинейной (Fig. 2, а), а во втором кусочно-линейной (Fig. 2, б).

На основе предложенной обобщённой модели СА с ДК частей рассматривается задача обеспечения гиперболического типа частотной зависимости коэффициента относительного затухания с достижением им в резонансе значений, близких к предельным. Обосновывается методика нахождения резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот возмущения по заданному отношению масс  $\mu$  и амплитуде возмущения  $X_0$ .

**2. Теоретические основы**

**2.1. Смещение состояния равновесия объекта**

Изменение безразмерной массы деформируемой части  $M_j$ , происходящее в моменты коммутации её с аккумулирующей частью (Fig. 3), описывается следующим образом:

$$M_j = \frac{M_j^I + M_j^u}{2} + \eta \frac{M_j^I - M_j^u}{2}, \quad (1)$$

где  $M_j^I$  и  $M_j^u$  – массы этой части при её нагружении и разгрузке;  $\eta$  – функция Хевисайда, принимающая значение  $+1$  на отрезке фазы колебаний  $\psi_1 = [0, \pi]$  и  $-1$  на отрезке  $\psi_2 = [\pi, 2\pi]$ .

Приближённое периодическое решение системы уравнений по относительной координате  $q_r = q - y$  записывается в виде [2]

$$q_r = m_{q,r} + a_{q,r} \cos \omega t,$$

где  $m_{q,r}$  – смещение центра колебаний;  $a_{q,r}$  – амплитуда;  $\omega$  – частота возмущения.

С использованием обозначений  $M_{q,r} = I + m_{q,r}/l_{1,0}$ ,  $A_{q,r} = a_{q,r}/l_{1,0}$  выражение для массы (1) принимает вид

$$M_j = (\mu + 1) \frac{M_{q,r} + \eta A_{q,r}}{\mu + M_{q,r} + \eta A_{q,r}}.$$

В этом выражении выделяется средняя и переносимая масса  $\Delta M_j$ .

Периодическое смещение состояния равновесия вводится как

$$\Delta L_j = \frac{\Delta l_j}{l_{1,0}} = M_j - I = \mu \frac{M_{q,r} - I + \eta A_{q,r}}{\mu + M_{q,r} + \eta A_{q,r}}.$$

Его среднее и амплитудное значения находятся по выражениям

$$\Delta L_j^{av} = \frac{\Delta L_j^I + \Delta L_j^u}{2} = \mu \frac{(M_{q,r} - I)(\mu + M_{q,r}) - A_{q,r}^2}{(M_{q,r} + \mu)^2 - A_{q,r}^2} = M_j^{av} - I, \quad (2)$$

$$\Delta L_j^a = \frac{\Delta L_j^I - \Delta L_j^u}{2} = \frac{\mu(\mu + 1)A_{q,r}}{(M_{q,r} + \mu)^2 - A_{q,r}^2} \equiv \Delta M_j. \quad (3)$$

**2.2. Эквивалентная линеаризация характеристики позиционной силы**

Выражение для кусочно-линейной характеристики позиционной силы модели на Fig. 3 записывается в виде

$$F_1(Q_r, \mu) = c_1(Q_r - \Delta L_j), \quad (4)$$

где  $c_1 = c_1^{dim}/c_{1,0}^{dim}$  – безразмерная жёсткость деформируемой части;  $c_{1,0}^{dim}$  – размерная жёсткость деформируемой части.

Аналогичное (4) выражение для кусочно-нелинейной характеристики модели на рис. 3 в общем виде можно записать как

$$F_1(Q_r, \mu) = F_r'(Q_r)(Q_r - \Delta L_j), \quad (5)$$

в котором  $F_r'(Q_r)$  – некоторая функция.

Подставляя координату  $Q_r = M_{q,r} - I + A_{q,r} \cos \psi$  в выражения (4) и (5), получим

$$F_1(\psi, \mu) = c_1(M_{q,r} - I + A_{q,r} \cos \psi - \Delta L_j), \quad (6)$$

$$F_1(\psi, \mu) = F_r'(M_{q,r} - I + A_{q,r} \cos \psi)(M_{q,r} - I + A_{q,r} \cos \psi - \Delta L_j). \quad (7)$$

Заменяем формулы для позиционной силы в функции фазы  $F_1(\psi, \mu)$  (6), (7) линеаризованным выражением

$$F_1(\psi, \mu) = M_{F,1} + A_{F,1}^c \cos \psi - A_{F,1}^s \sin \psi, \quad (8)$$

в котором  $M_{F,1}$ ,  $A_{F,1}^c$ ,  $A_{F,1}^s$  – соответственно постоянная составляющая и амплитуды потенциальной и диссипативной компонент позиционной сил. Вычисление этих коэффициентов для обоих типов характеристики выполняется по формулам метода гармонической линеаризации [2]

Эквивалентную жёсткость можно получить по выражению

$$c_{eq}(A_{q,r}) = A_{F,1}^c/A_{q,r}$$

С использованием частоты свободных колебаний  $\omega_{fr}(A_{q,r})$ ,

собственного времени системы и безразмерной частоты возмущения

$$\tau = \omega_{fr}(A_{q,r})t; \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_{fr}(A_{q,rel})} = \frac{\omega}{\omega_{nat} \sqrt{c_{eq}(A_{q,r})}} = \frac{\omega}{\omega_{nat} v(A_{q,r})},$$

где  $\omega_{nat}$  – собственная, а  $v(A_{q,r})$  – безразмерная частота свободных колебаний, выражение для эквивалентного коэффициента сопротивления записывается в виде

$$\beta_{eq}(A_{q,r}) = \frac{A_{F,1}^s}{v(A_{q,r}) \eta A_{q,r}}.$$

Проинтегрировав элементарную мощность, получим для обоих типов СА с ДК частей выражение для количества энергии, рассеиваемое диссипативной силой  $-A_{F,1}^s \sin \psi$  за период

$$\Delta W = -2 \int_0^\pi A_{F,1}^s \sin \psi (-A_{q,r} \eta \sin \psi) \frac{d\psi}{\eta} = \pi A_{F,1}^s A_{q,r}.$$

Эта энергия, пропорциональна амплитуде (3)  $\Delta L_j^a \equiv \Delta M_j$

$$\Delta W = \Delta L_j^a \cdot f(M_{q,r}, A_{q,r}, \mu), \quad (9)$$

в котором  $f(M_{q,r}, A_{q,r}, \mu)$  – некоторая функция.

Выражение для коэффициента относительного затухания записывается в виде

$$\psi(A_{q,r}) = \frac{\beta_{eq}^{dim}(A_{q,r})}{2M \omega_{fr}(A_{q,r})} = \frac{\beta_{eq}^{dim}(A_{q,r})}{2M \omega_{nat} \sqrt{c_{eq}(A_{q,r})}}, \quad (10)$$

в котором

$$\beta_{eq}^{dim}(A_{q,r}) = \beta_{eq}(A_{q,r}) \sqrt{c_{1,0} M}.$$

Тангенс угла механических потерь  $\delta$  вводится как

$$\alpha = A_{F,1}^s/A_{F,1}^c \equiv 2\psi \eta = tg \delta. \quad (11)$$

**2.3. Линеаризованные уравнения движения СА с ДК частей упругих элементов**

Для анализа систем с одной степенью свободы уравнения движения массы  $M$  для обоих типов неоднозначных кусочных СА с ДК частей (Fig. 3)

$$M\ddot{Q} + c_{1,0}^{dim} F_r'(Q_r)(Q_r - \Delta L_j) = 0, \quad M\ddot{Q} + c_{1,0}^{dim} (L_r - \Delta \theta_1) = 0,$$

Заменяя в этом уравнении неконсервативную позиционную силу её гармонически линеаризованной аппроксимацией (8), и отделяя в нём постоянную составляющую  $M_{F,1}$ , получим уравнение поверхности связи неизвестных параметров решения  $A_{q,r}$ ,  $M_{q,r}$  и отношения масс частей  $\mu$

$$M_{F,1}(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu) = 0. \quad (12)$$

Приравняв нулю центрированные составляющие, получим

$$a\ddot{Q}^* + c_{1,0}^{dim} (A_{F,1}^c \cos \psi - A_{F,1}^s \sin \psi) = 0.$$

После некоторых преобразований это уравнение принимает вид

$$Q_r^{*''} + 2\psi(A_{q,r})Q_r^{*'} + Q_r^* = -Y'',$$

в котором коэффициент  $\psi(A_{q,r})$  определяется по (10).

**2.4. Некоторые результаты и выводы по разделу 2**

Если в схеме на Fig. 3 используется пневмоэлемент, то

$$M_{F,1} = I - \frac{(\mu + 1)(M_{q,r}\mu + M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2)}{\left[ (\mu + M_{q,r})^2 - A_{q,r}^2 \right] \sqrt{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}}, \quad (13)$$

$$A_{F,1}^c = 2(I - M_{F,1}) \frac{M_{q,r} - \sqrt{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}}{A_{q,r}}$$

$$A_{F,1}^s = \frac{2}{\pi} \frac{\mu(\mu + 1) \ln \left( \frac{M_{q,r} + A_{q,r}}{M_{q,r} - A_{q,r}} \right)}{(\mu + M_{q,r})^2 - A_{q,r}^2}.$$

Жёсткости частей при использовании в схеме на рис. 3 твёрдых деформируемых тел, например, пружин, то находятся как

$$c_1 = \frac{I}{I + \Delta L_1} = \frac{I}{\mu + I} \left( I + \frac{\mu}{M_{q,r} + \eta A_{q,r}} \right),$$

$$c_2 = \frac{I}{\mu - \Delta L_1} = \frac{I}{\mu + I} \left( I + \frac{M_{q,r} + \eta A_{q,r}}{\mu} \right).$$

Коэффициенты гармонической линеаризации в этом случае найдутся по выражениям

$$M_{F,I} = \frac{I}{\mu + I} \left( M_{q,rel} - I + \frac{\mu A_{q,r}^2}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2} \right), \quad (14 a)$$

$$A_{F,I}^c = \frac{A_{q,r}}{\mu + I} \left( I + \frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2} \right), \quad A_{F,I}^s = \frac{4}{\pi} \frac{A_{q,r}}{\mu + I} \frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 - A_{q,r}^2}.$$

Особенностью поверхности связи (12) с учётом (13) для пневмоэлемента с ДК его частей является наличие у любого сечения её плоскостью  $A_{q,r} = const$  вблизи значения  $\mu = 0,4$  минимума и точки перегиба при  $\mu = 4$  (Fig. 4, a). При отношении масс частей  $\mu = 1$  смещение  $M_{q,r}$  равно его значению при отношении  $\mu = 0$ .

На поверхности связи (12) с учётом (14) для твёрдых деформируемых тел одна и та же амплитуда может устанавливаться при трёх различных значениях смещения (Fig. 4, b).

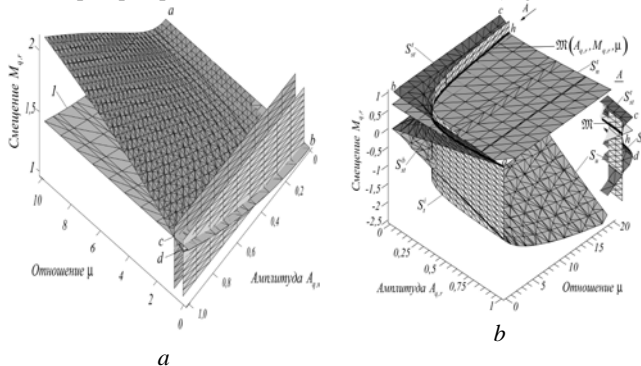


Fig. 4. Поверхности связи параметров решения  $A_{q,r}$ ,  $M_{q,r}$  и отношения масс  $\mu$  для системы ДК частей на Fig. 3; (a) для системы пневмоэлементом, 1 – при  $\mu = 0$ ; (b) для системы с твёрдым деформируемым элементом

На устойчивой части поверхности связи  $S_{st}$  существует кривая  $M$ , на которой производная от смещения по амплитуде меняет знак (Fig. 4, b) и которая разделяет  $S_{st}$  на верхнюю  $S_{st}^t$  и нижнюю  $S_{st}^b$  части.

В соответствии с (10) выражения для частотных характеристик коэффициентов относительного затухания принимают вид

$$\psi(A_{q,r}) = \frac{\mu(\mu + I)A_{q,r}}{2\pi\eta \left[ (\mu + M_{q,r})^2 - A_{q,r}^2 \right]} \ln \frac{M_{q,r} + A_{q,r}}{M_{q,r} - A_{q,r}} \quad (15)$$

(Fig. 5, a), если в схеме на рис. 3 рассматривается пневмоэлемент и

$$\psi(A_{q,r}) = \frac{2}{\pi\eta} \frac{\mu M_{q,r}}{M_{q,r}^2 + \mu M_{q,r} - A_{q,r}^2} \quad (16)$$

(Fig. 5, b), если рассматривается твёрдый деформируемый элемент.

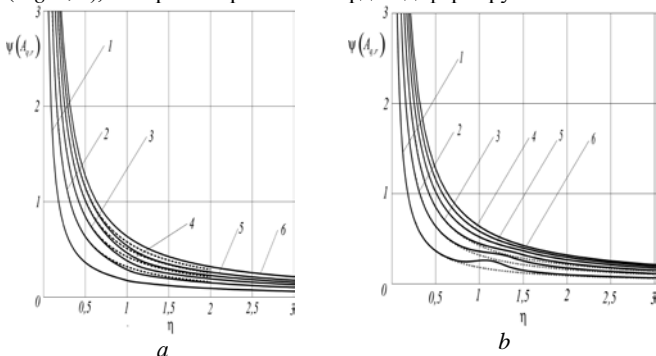


Fig. 5. Частотные характеристики коэффициента относительного затухания 1 –  $\mu = 0,4$ ; 2 –  $\mu = 1$ ; 3 –  $\mu = 2$ ; 4 –  $\mu = 4$ ; 5 –  $\mu = 10$ ; 6 –  $\mu = \infty$ ;

(a) для СА с ДК частей пневмоэлементов,  $X_0 = 0,5$ ;

(b) для СА с ДК частей твёрдых деформируемых тел

Гиперболический тип частотных зависимостей коэффициента  $\psi(A_{q,r})$  в обоих случаях обусловлен независимостью количества рассеянной за период энергии (9) от частоты возмущения  $\eta$ .

В пределе при  $M_{q,r} \rightarrow I$  и  $A_{q,r} \rightarrow 0$  выражения (15) для поверхности на Fig. 4, a и (16) для части поверхности связи  $S_{st}^t$  (Fig. 4, b) принимают вид (штриховые линии на Fig. 5)

$$\psi^{lim} = \frac{2}{\pi\eta} \frac{\mu}{\mu + I}. \quad (16)$$

### 3. Особенности СА с ДК частей с неоднозначными кучочно-линейными характеристиками позиционной силы

Независимо от отношения масс  $\mu$  параметры движения  $A_{q,r}$  и  $M_{q,r}$  СА этого типа не должны превосходить значений  $A_{q,r}^{extr}$ ,  $M_{q,r}^{extr}$ , соответствующих кривой  $M$  (Fig. 4, b).

### 3.1. Анализ геометрических особенностей поверхности связи параметров

Устойчивую часть поверхности связи параметров  $S_{st}$  представим в поворнутом виде (Fig. 6, a).

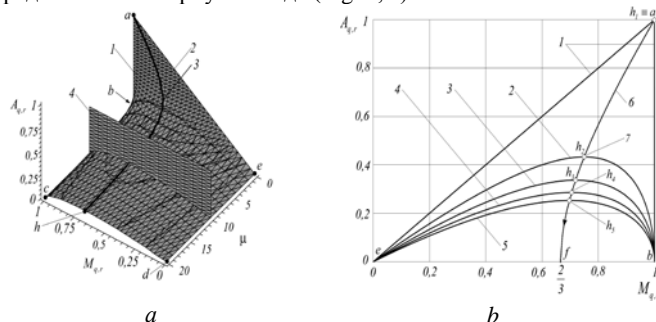


Fig. 6. (a) Устойчивая часть поворнутой поверхности связи параметров  $S_{st}$ . 1 – верхняя часть  $S_{st}^t$ ;

2 – нижняя часть  $S_{st}^b$ ;

3 – кривая экстремальных амплитуд  $M(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu)$ ;

(b) Проекция сечений плоскостями 4 поверхности  $S_{st}$  на плоскость  $A_{q,r} - M_{q,r}$ : 1 –  $\mu = 0$ ; 2 –  $\mu = 0,5$ ; 3 –  $\mu = 1$ ;  $\mu = 1,5$ ; 5 –  $\mu = 2$ .

Параметрическое представление кривой экстремальных амплитуд  $M(A_{q,r}, M_{q,r}, \mu)$  (рис. 4, b; 6) имеет вид

$$A_{q,r}(t) = \frac{2t}{3 - t^2}; \quad M_{q,r}(t) = \frac{2}{3 - t^2}; \quad \mu(t) = \frac{(t^2 - 1)^2}{t^2(3 - t^2)} \quad (17)$$

Кривая (17) разграничивает режимы движения в зависимости от начальных условий  $Q_0$ ,  $Q'_0$  и амплитуды возмущения  $X_0$ .

### 3.2. Некоторые динамические особенности

#### 3.2.1. Смещение состояния статического равновесия и функция параметров

Выражения (17) позволяет построить 3D-поверхности зависимостей (2), (3), (9) и сечения этих поверхностей плоскостями  $\mu = const$  и  $A_{q,r} = const$  (Fig. 7, 8, 9), (Table 1). Кривые 11 на этих рисунках соответствуют кривой  $M$  на Fig. 4, b.

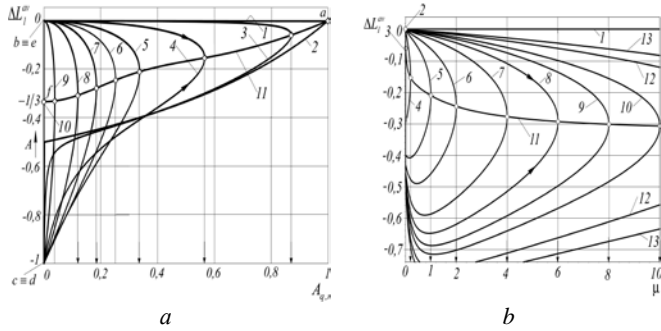


Fig. 7. Зависимость среднего значения смещения состояния статического равновесия от амплитуды  $A_{q,r}$  (a) и отношения  $\mu$  (b)

Table 1: Некоторые значения отношения масс и соответствующие им экстремальные амплитуды

N	2	3	4	5
$\mu$	$10^{-10}$	0,01	0,2	1
$A_{q,r}^{extr} \cong$	0,999	0,870	0,566	0,337

Продолжение Table 1

6	7	8	9	10
2	4	10	100	$10^{-10}$
0,253	0,185	0,120	0,038	$0,38 \cdot 10^{-5}$

(кривым 12 и 13 соответствуют  $\mu^{extr} = 15$  и  $\mu^{extr} = 20$ ).

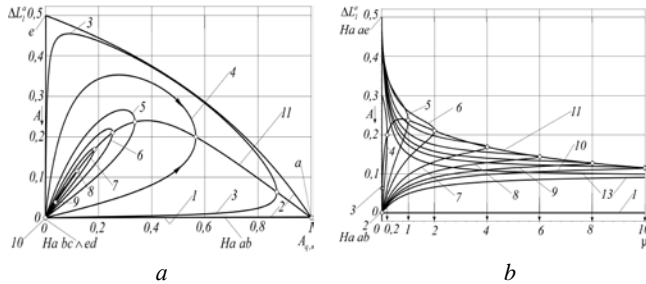


Fig. 8. Зависимость амплитуды смещения состояния равновесия от амплитуды  $A_{q,r}$  (a) и отношения масс  $\mu$  (b)

Общий характер изменения рассеянной энергии (9) определяется амплитудой смещения состояния статического равновесия  $\Delta L_{st}^a$  (Fig. 8). Вместе с тем на изменение энергии  $\Delta W$  существенное влияние оказывает влияние функция параметров  $f_{hb} = 4M_{q,r}A_{q,r}c_1^l c_1^{ml}$  (Fig. 9).

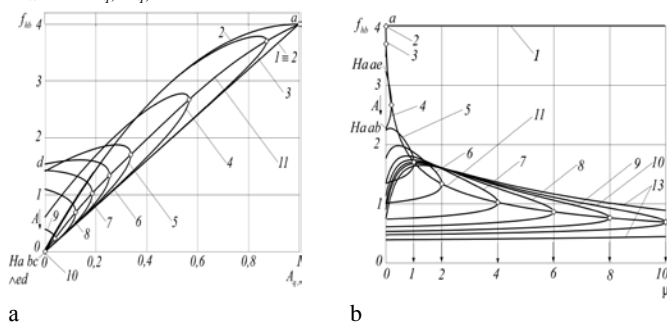


Fig. 9. Зависимость функции параметров  $f_{hb}$  от амплитуды  $A_{q,r}$  (a) и от отношения масс  $\mu$  (b)

3.2.2. Амплитудные зависимости эквивалентных коэффициентов

Одинаковый характер зависимости эквивалентных коэффициентов сопротивления  $\beta_{eq}(A_{q,r})$  и жёсткости  $c_{eq}(A_{q,r})$  (рис. 10, a) определяет слабую зависимость коэффициента  $\psi(A_{q,r})$  от амплитуды на поверхности  $S_{st}^l$  и почти линейный спад его на поверхности  $S_{st}^b$  (Fig. 10, b).

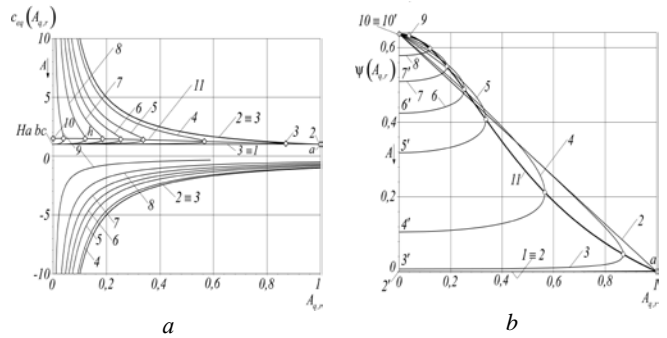


Fig. 10. Зависимость эквивалентной жёсткости (a) и коэффициента относительного затухания при  $\eta = \eta_a^{res} = 1$  (b) от амплитуды относительных колебаний

3.2.3. Предельные значения резонансной частоты возмущения

Из выражения для частотной характеристики относительных колебаний линеаризованной СА с ДК упругих элементов найдём резонансную частоту возмущения

$$\eta_r^{res} = \sqrt{1 + \left[ \frac{4\mu M_{q,r}}{\pi(M_{q,r}^2 + \mu M_{q,r} - A_{q,r}^2)} \right]^2}. \quad (18)$$

Предельные значения этой частоты на поверхностях  $S_{st}^l$  и  $S_{st}^b$  находятся соответственно по формулам

$$\eta_r^{res} \Big|_{lim}^l = \lim_{\substack{A_{q,r} \rightarrow 0 \\ M_{q,r} \rightarrow 1}} \eta_r^{res} = \sqrt{1 + \left( \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{\mu + 1} \right)^2},$$

$$\eta_r^{res} \Big|_{lim}^b = \lim_{\substack{A_{q,r} \rightarrow 0 \\ M_{q,r} \rightarrow 0}} \eta_r^{res} = \sqrt{1 + \left( \frac{4}{\pi} \right)^2} \cong 1,619.$$

Исключив из (18) смещение  $M_{q,r}$ , получим зависимость резонансной частоты относительных колебаний  $\eta_r^{res}$  от амплитуды  $A_{q,r}$  и отношения

масс частей  $\mu$  (Fig. 11).

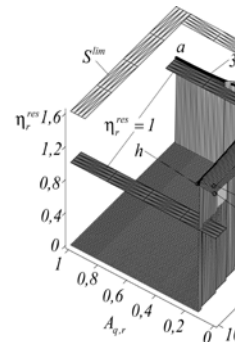


Fig. 11. Зависимость резонансной частоты относительных колебаний  $\eta_r^{res}$  от амплитуды  $A_{q,r}$  и отношения масс  $\mu$ ;

$$S^{lim} - \eta_r^{res} \cong 1,619;$$

1, 2 – поверхности и кривая резонансных частот 3, соответствующие поверхностям 1, 2 и кривой 3 на Fig. 6

3.2.4. Предельная амплитуда возмущения

Считая, что резонансная амплитуда относительных колебаний  $A_{q,r}^{res}$  достигается на кривой экстремальных амплитуд M и равна значению  $A_{q,r}^{extr}$ , подставим в АЧХ

$$\frac{A_{q,r}^{extr}}{X_0^{lim}} - \sqrt{1 + \left\{ \frac{\pi \left[ (M_{q,r}^{extr})^2 + \mu M_{q,r}^{extr} - (A_{q,r}^{extr})^2 \right]}{4\mu M_{q,r}^{extr}} \right\}^2} = 0,$$

выражения для амплитуды  $A_{q,r}^{extr}(\mu)$  и смещения  $M_{q,r}^{extr}(\mu)$ . Решая полученное трансцендентное уравнение относительно амплитуды кинематического возмущения, получим зависимость её предельного значения от отношения масс частей упругого элемента  $X_0^{lim} = f(\mu)$  (Fig. 12).

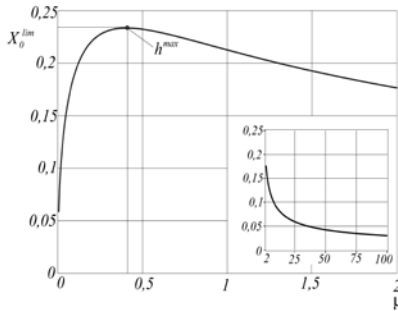


Fig. 12. Зависимость предельной амплитуды возмущения  $X_0^{lim}$  от отношения масс  $\mu$

**3. Некоторые результаты и выводы по разделу 3**

1. С учётом выражений для среднего (2) и амплитудного (3) значений смещения состояния статического равновесия выражения для эквивалентных коэффициентов жёсткости и относительного затухания (10) переписываются в виде

$$c_{eq}(A_{q,r}) = \frac{I + \Delta L_1^{av}}{(I + \Delta L_1^{av})^2 - (\Delta L_1^a)^2}, \tag{19 a}$$

$$\psi(A_{q,r}) = \frac{2}{\pi\eta} \cdot \frac{\mu}{\mu + 1} \left\{ I - \frac{I}{\mu} \left[ \Delta L_1^{av} - \frac{(\Delta L_1^a)^2}{I + \Delta L_1^{av}} \right] \right\} \tag{19 b}$$

Анализ графиков на рис. 7 и 8 показывает, что слагаемым  $\Delta L_1^a$  в (19) можно пренебречь. В этом случае эквивалентные коэффициенты (Fig. 10) определяются изменением среднего смещения состояния равновесия.

После некоторых преобразований (19) приводятся к виду

$$c_{eq}(M_{q,r}) = I/M_{q,r}, \quad \psi(M_{q,r}) = \frac{2}{\pi\eta} \left( I - \frac{M_{q,r}}{\mu + 1} \right), \tag{20}$$

в которых всякая зависимость этих коэффициентов от особенностей поверхности (Fig. 4, б; 6) вообще исчезает.

Поскольку отрезок изменения амплитуды и смещения на устойчивой части поверхности связи одинаков  $[0, I]$ , то кривая (19, а) совпадает с гиперболой 2 на рис. 10, а. Динамическая жёсткость на части этой гиперболы в полуинтервале  $M_{q,r} \in [0, 2/3]$  соответствует поверхности  $S_{st}^b$ , а на отрезке  $M_{q,r} \in [2/3, I]$  – поверхности  $S_{st}^t$  и кривой М (рис. 4, б).

2. Гиперболический тип частотной характеристики коэффициента относительного затухания обусловлен практически линейной зависимостью как амплитуды  $\Delta L_1^a$  (рис. 8, а), так и функции  $f_{hb}$  (рис. 9, а) от амплитуды  $A_{q,r}$  и независимостью количества рассеянной энергии  $\Delta W$  от частоты возмущения.

3. Положительный знак амплитуды  $\Delta L_1^a = (\Delta L_1^t - \Delta L_1^{unl})/2$  (рис. 8) обеспечивается тем, что отрицательная величина смещения состояния равновесия при разгрузке упругого элемента  $\Delta L_1^{unl}$  всегда больше абсолютной величины смещения  $\Delta L_1^t$  при его нагружении. Эта особенность обеспечивает эквивалентную диссипативность СА с неоднозначной кусочно-линейной характеристикой.

**4. Выбор параметров систем амортизации с дискретной коммутацией частей упругих элементов**

При гиперболическом типе частотной характеристики коэффициента относительного затухания выражения для частот  $\eta_a^{res}$  и  $\eta_r^{res}$ , на которых происходит резонанс абсолютных и относительных колебаний, имеют вид

$$\eta_a^{res} = \omega_a^{res} / \omega_{fr,a}^{res} = I; \quad \eta_r^{res} = \omega_r^{res} / \omega_{fr,r}^{res} = \sqrt{I + \alpha_{char}^2}, \tag{21 a, b}$$

где  $\omega_{fr,a}^{res} = v_a^{res} \omega_{nat}$  и  $\omega_{fr,r}^{res} = v_r^{res} \omega_{nat}$  – размерные частоты свободных колебаний, соответствующие амплитудам относительных перемещений на обоих резонансах;  $\omega_{nat}$  – собственная

частота деформируемой части упругого элемента (при  $\mu = 0$ ). При этом энергетическая граница  $E_a$  превращается в прямую

$$E'_{abs} = \sqrt{I + I/\alpha_{char}^2}. \tag{22}$$

Значения АЧХ  $W_a^{res}$  и  $W_r^{res}$  на частотах резонансов будут одинаковыми, равными постоянному значению энергетической границы абсолютных колебаний(22), т.е.

$$W_a(\eta_a^{res}) = W_r(\eta_r^{res}) = E'_a. \tag{23}$$

**4.1. Характерные и предельные значения тангенса угла механических потерь**

Амплитудные зависимости тангенса угла потерь (11) для СА с характеристиками позиционной силы (4) и (5) имеют соответственно вид (рис. 13, а), (рис. 13, б).

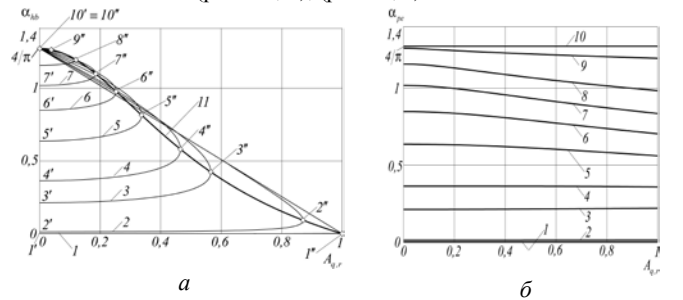


Fig.13. Амплитудная зависимость тангенса угла потерь для СА с ДК частей: (а) с кусочно-линейной, (б) – с кусочно-нелинейной характеристикой позиционной силы (Table 1)

Вычисляя пределы тангенсов углов потерь (Fig. 13), найдём их характерное значение, не зависящее от типа элемента

$$\alpha_{char} = \lim_{\substack{M_{q,r} |_{S_{st}^t} \rightarrow I, \\ A_{q,r} \rightarrow 0}} \alpha_{hb} = \lim_{\substack{M_{q,r} |_{S_{pe}} \rightarrow I, \\ A_{q,r} \rightarrow 0}} \alpha_{pe} = \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{\mu + 1}. \tag{24}$$

Предельное значение тангенса угла потерь найдётся как

$$\alpha_{char}^{lim} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mu}{\mu + 1} \Big|_{S_{st}^t, S_{pe}} = \frac{4}{\pi}. \tag{25}$$

**4.2. Влияние амплитуды возмущения на предельные значения параметров колебаний**

Частотные характеристики СА с ДК частей с кусочно-нелинейной характеристикой: с малым  $\mu = 0,4$  (а); с близким к оптимальному  $\mu = 4$  (б) имеют следующие особенности (Fig. 14).

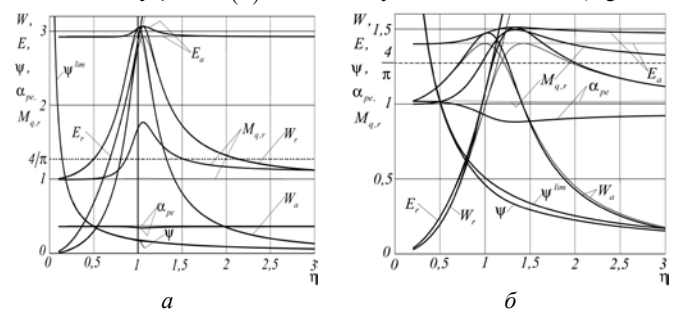
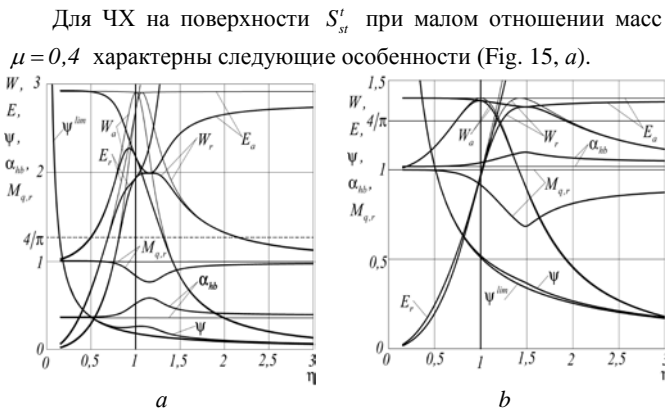


Fig. 14. Влияние амплитуды возмущения  $X_0$  на АЧХ  $W_a, W_r$ , границу  $E_a$ , коэффициент  $\psi$ , тангенс  $\alpha_{pe}$ , смещение  $M_{q,r}$  СА с ДК частей с кусочно-нелинейной характеристикой;  $-X_0 = 0,05; -X_0 = 0,5$

При малой амплитуде  $X_0$  независимо от отношения  $\mu$  ЧХ  $\psi(\eta)$  совпадает с предельной характеристикой (27). Десятикратное увеличение амплитуды  $X_0$  при  $\mu = 4$  (Fig. 14, б) приводит к наибольшему отклонению характеристики  $\psi(\eta)$  от гиперболы и к изменению экстремальных значений частот и коэффициентов передачи на 10–15%.



**Fig. 15.** Влияние амплитуды  $X_0$  на АЧХ  $W_a$ ,  $W_r$ , границу  $E_a$ , тангенс  $\alpha_{hb}$ , коэффициент  $\psi$ , смещение  $M_{q,r}$  СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой на поверхности  $S_{st}'$ ;

(a) –  $\mu = 0,4$ ,  $X_0^{lim} = 0,2337$ ;

(b) –  $\mu = 4$ ,  $X_0^{lim} = 0,1369$ ;

–  $X_0 = 0,1X_0^{lim}$ ; –  $X_0 = X_0^{lim}$

1. Существенное уменьшение максимальных значений АЧХ  $W_a^{res}$  и  $W_r^{res}$ , происходящее с увеличением амплитуды возмущения  $X_0$  до предельной амплитуды  $X_0^{lim}$ , значение которой определяется кривой М.

2. Резкое отклонение в зоне резонанса при амплитуде  $X_0^{lim}$  энергетической границы  $E_a$  от прямой, параллельной оси частот.

На предельных амплитудах возмущения  $X_0^{lim}$  при увеличении отношения масс частей  $\mu$  происходит сближение всех характеристик, соответствующих обеим устойчивым частям поверхности связи (рис. 15, b), выражающееся в том, что:

- энергетическая граница абсолютных колебаний  $E_a$  существенно приближается к прямой, параллельной оси частот;
- максимум АЧХ абсолютных колебаний  $W_a$  практически располагается на скелетной вертикали  $\eta = 1$ ;
- максимумы обеих АЧХ  $W_a$  и  $W_r$  приближаются к своим предельным значениям  $W_r^{res} = W_a^{res} \cong 4/\pi \cong 1,273$ .

Независимо от типа СА с ДК частей размерная частота кинематического возмущения  $\omega_r^{res} = 1,619\omega_{jr,r}^{res} = 1,619\omega_{nat}v_r^{res}$  является верхней границей положения максимума АЧХ относительных перемещений.

**4.3. Методика выбора параметров**

Для обоих типов упругих элементов методику нахождения частот  $v_a^{res}$  и  $v_r^{res}$  можно представить в двух вариантах.

Вначале независимо от варианта, задавая некоторым значением отношения масс  $\mu$ , по выражениям для АЧХ с учётом (24), (25) определяются коэффициенты передачи относительных колебаний на частотах  $\eta_a^{res} = 1$  и  $\eta_r^{res} = \sqrt{1 + \alpha_{char}^2}$ .

Далее находятся соответствующие этим частотам амплитуды относительных колебаний

$$A'_{q,r} = X_0/\alpha_{char} \text{ и } A''_{q,r} = X_0\sqrt{1 + 1/\alpha_{char}^2},$$

где амплитуда  $X_0$  для СА с ДК частей с кусочно-линейной характеристикой при данном отношении  $\mu$  изменяется в диапазоне  $0,1X_0^{lim} - X_0^{lim}$ .

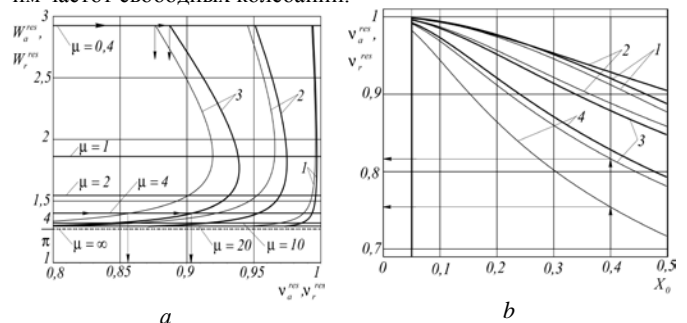
Амплитуде  $A'_{q,r}$  соответствует безразмерная частота свободных колебаний  $v_a^{res}$ , а амплитуде  $A''_{q,r}$  – частота  $v_r^{res}$ . Размерные значения частот, на которых происходит резонанс абсолютных и относительных колебаний, находятся из (21).

Теперь по первому варианту методики выбора параметров, рассматривая при решении уравнений поверхностей связи (12) с учётом (15), (16) амплитуды  $A'_{q,rel}$ ,  $A''_{q,rel}$  и отношение масс частей связей  $\mu$  в качестве аргументов функций двух переменных, а безразмерную амплитуду возмущения  $X_0$  как параметр, находим соответствующие им значения динамической жёсткости  $c_{eq} = f(M_{q,r}, A_{q,r}, \mu)$  и безразмерные частоты свободных колебаний  $v_a^{res}$  и  $v_r^{res}$ .

По второму варианту методики при решении тех же уравнений (12) с учётом (15), (16) как аргументы функций двух переменных рассматриваются амплитуды  $A'_{q,r}$ ,  $A''_{q,r}$  и амплитуда возмущения  $X_0$ , а отношение масс частей связей  $\mu$  – как параметр. Частоты  $v_a^{res}$  и  $v_r^{res}$  находятся аналогично.

**4.3.1. Выбор параметров движения СА с кусочно-нелинейной характеристикой**

На Fig. 16, a приведены графики, иллюстрирующие первый, а на рис. Fig. 16, b – второй вариант методики определения резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот свободных колебаний.



**Fig. 16.** К выбору резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот свободных колебаний СА с ДК частей пневмоэлемента;

(a) – на дискретных амплитудах возмущения: 1 –  $X_0 = 0,1$ ; 2 –  $X_0 = 0,3$ ; 4 –  $X_0 = 0,5$ ;

(b) – На дискретных отношениях масс: 1 –  $\mu = 0,4$ ;  $W^{res} \cong 2,925$ ; 2 –  $\mu = 4$ ,  $W^{res} \cong 1,401$ ; 3 –  $\mu = 10$ ,  $W^{res} \cong 1,321$ ; 4 –  $\mu = 20$ ,  $W^{res} \cong 1,296$ ;

–  $v_a^{res}$ , –  $v_r^{res}$

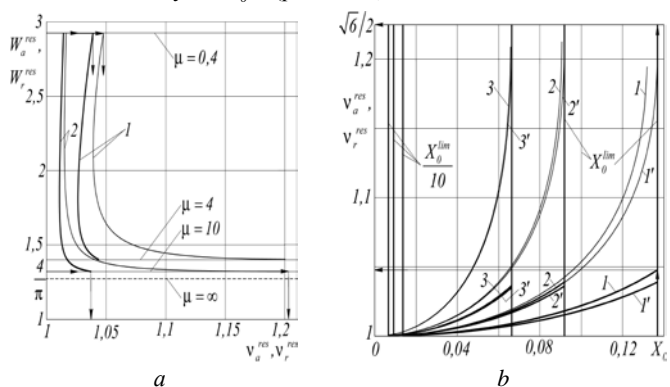
Задавая некоторым значением отношения масс  $\mu$ , по выражению (24) находим значение  $\alpha_{char}$ , а по (23) – соответствующее ему одинаковые резонансные коэффициенты передачи  $W_a^{res}$  и  $W_r^{res}$ . Проводя горизонтальную прямую до пересечения с кривыми, соответствующими действующей амплитуде возмущения  $X_0$  (рис. 16, a), и опуская из точек пересечения два перпендикуляра, находим частоты свободных колебаний  $v_a^{res}$  и  $v_r^{res}$ , соответствующие резонансным частотам возмущения  $\eta_a^{res}$  и  $\eta_r^{res}$ .

По второму варианту методики выбора параметров (рис. 16, b), восстанавливая перпендикуляр из точки, соответствующей амплитуде возмущения  $X_0$ , до пересечения с кривыми одинаковых коэффициентов передачи (23) на принятом отношении масс  $\mu$ , и проводя через точки пересечения две горизонтальные прямые, находим частоты свободных колебаний  $v_a^{res}$  и  $v_r^{res}$ , соответствующие резонансным частотам возмущения  $\eta_a^{res}$  и  $\eta_r^{res}$ .

**4.3.2. Выбор параметров движения СА с кусочно-линейной характеристикой**

В связи с зависимостью амплитуды возмущения  $X_0^{lim}$  от отношения масс  $\mu$  (Fig. 12) кривые, аналогичные графикам на рис.16, a, для кусочно-линейных характеристик заканчиваются

на разных горизонталях, соответствующих выбранной предельной амплитуде  $X_0^{lim}$  (рис. 17, а).



**Fig.17.** К выбору резонансных коэффициентов передачи и соответствующих им частот свободных колебаний СА с ДК частей из твёрдых тел на поверхности  $S_{st}^t$ ;

- (a) 1 –  $X_0^{lim} = 0,1369$ ; 2 –  $X_0^{lim} = 0,0918$ ;
  - (b) 1 –  $\mu = 4, W^{res} \cong 1,401$ ; 2 –  $\mu = 10, W^{res} \cong 1,321$ ; 3 –  $\mu = 20, W^{res} \cong 1,296$ ; 1' –  $\mu = 4, W^{res} \cong 1,352$ ; 2' –  $\mu = 10, W^{res} \cong 1,304$ ; 3' –  $\mu = 20, W^{res} \cong 1,288$ ;
- $\nu_a^{res}, \nu_r^{res}$

**4.5. Выводы по разделу 4**

1. При анализе частотных характеристик гармонически линейризованных СА с ДК частей установлено, что на отрезке отношения масс  $\mu \in [4, 20]$  энергетическая граница абсолютных колебаний может считаться прямой, параллельной оси и частот. В связи с этим она является геометрическим местом одинаковых максимумов АЧХ абсолютных и относительных перемещений независимо от типа упругого элемента, особенностей поверхности связи параметров решения и амплитуды возмущения.

2. Для СА с кусочно-нелинейной и СА с кусочно-линейной характеристикой позиционной силы на верхней части поверхности связи параметров  $S_{st}^t$  и на нижней части этой поверхности  $S_{st}^b$  вблизи кривой экстремальных амплитуд М резонансные коэффициенты передачи определяются только отношением масс частей. На поверхности  $S_{st}^b$  на малых амплитудах возмущения эти коэффициенты  $W_a^{res} = W_r^{res} \cong 4/\pi$  не зависят от отношения масс.

3. На отрезке отношения масс  $\mu \in [4, 20]$  даже при существенно большой амплитуде возмущения  $X_0 = 0,5$  частоты свободных колебаний СА с ДК частей пневмоэлемента, соответствующие резонансным частотам возмущения, изменяются на весьма нешироком отрезке  $\nu \in [0,78; 0,905]$ ; при малой же амплитуде  $X_0 = 0,1$  этот отрезок сужается до величины  $\nu \in [0,97; 0,986]$ , а сами частоты приближаются к частоте недемпфированной системы  $\nu = 1$ .

4. Среднее значение частоты свободных колебаний СА с ДК частей элементов из твёрдых тел на поверхности  $S_{st}^t$  на отрезке отношения масс  $\mu \in [4, 20]$ , соответствующее резонансу абсолютных колебаний составляет величину  $\nu_a^{res} (A_{q,r}^{extr}) \cong 1,04$ , а относительных –  $\nu_{rel}^{res} (A_{q,r}^{extr}) \cong 1,21$ .

**Заключение**

1. Способ амортизации объектов, основанный на наложении-снятии связи на часть упругих элементов в окрестности амплитудных положений объекта, обеспечивает периодическое смещение его состояния равновесия и тем самым придаёт системе неконсервативные свойства.

2. Почти линейная зависимость амплитудных характеристик смещения состояния статического равновесия, функции

параметров и независимость их от частоты возмущения в моменты дискретной коммутации частей упругих элементов позволяет получить гиперболический тип характеристики коэффициента относительного затухания. При этом по сравнению с обычным механизмом внутреннего трения в резонансе достигается существенно большее значение этого коэффициента.

3. Слабая зависимость тангенса угла механических потерь от частоты имеет следствием практически постоянство энергетической границы абсолютных колебаний, что предоставляет возможность разработки простой методики выбора параметров для системы с одной степенью свободы. Для системы с конечным числом степеней свободы расчёт ЧХ следует проводить по формулам линейной теории с определением коэффициента сопротивления из приближённых формул для коэффициента относительного затухания, пренебрегая в них, если это возможно, амплитудной зависимостью частоты свободных колебаний.

**References**

1. Колосский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966 – 317 с.
2. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: Учеб. пособие. – 3 изд., стереотипное. – Новосибирск: НГУ – Сибирское университетское издательство, 2001. – 608 с.
3. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем (приближённые методы). – М.: Наука, 1978. – 352 с.