АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СРЕДНИХ

NONLINEAR ANALYSIS OF MECHANICAL SYSTEMS METHOD OF AVERAGE

Проф., докт. тех. наук Смелягин А.

Кубанский государственный технологический университет – Краснодар, Россия

Abstract: The dynamics of most machines is described by nonlinear differential equations, to find an exact analytical solution of which is not possible. Therefore, it is necessary to find approximate solutions to differential equations. It is desirable that these solutions were simple in shape and is well approximated by the law of motion of the object over the whole of its displacement. Proposed solution of nonlinear differential equations describing the motion of vehicles found with the help of a method based on an assessment of the average residual method of averages. It is shown that the proposed method is simpler than the methods of Galerkin and Ritz, and it will not yield to them in terms of accuracy.

KEY WORDS: MACHINERY, DYNAMICS, NONLINEAR EQUATIONS, APPROXIMATE SOLUTIONS, ACCURACY.

1. Введение

Динамика большинства машин описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, найти точное аналитическое решение которых не представляется возможным. Поэтому возникает необходимость нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений. Желательно, чтобы эти решения были простыми по форме и достаточно хорошо аппроксимировали закон движения исследуемого объекта на всем участке его перемещения.

2. Предпосылки и средства решения проблемы

Анализ законов движений механических систем [1] и известных приближенных методов решения дифференциальных уравнений [2] показал, что наиболее полно предъявленным требованиям отвечают методы Галеркина и Ритца.

Недостатками этих методов является вычисление достаточно сложных интегралов и решение алгебраических уравнений высоких степеней при определении постоянных коэффициентов, минимизирующих невязку, даже применительно к сравнительно простым исходным моделям.

Предлагается приближенные решения нелинейных дифференциальных уравнений находить с помощью метода, основанного на оценке средней невязки методом средних.

Рассмотрим суть этого метода.

3. Решение рассматриваемой проблемы

Допустим, необходимо найти решение дифференциального уравнения

$$f(D,x,t)=0, \tag{1}$$

где $f(D,x,t)$ - некоторая, в общем случае нелинейная функция, оператора дифференцирования $D=d/dt$, зависимой переменной x и независимой переменной t.

Пусть уравнение (1) не удается проинтегрировать, тогда, как и в методах Галеркина и Ритца, будем искать приближенное решение в виде

$$x(t)=\lambda_0 x_0(t)+\lambda_1 x_1(t)+...+\lambda_m x_m(t), \tag{2}$$

где $x(t)$ - функция, аппроксимирующая точное решение уравнения (1) и удовлетворяющая начальным условиям; $x_0(t)$ - функция, наиболее близко аппроксимирующая точное решение уравнения (1); $x_1(t), x_2(t),\ldots, x_m(t)$ - поправочные функции; $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, - постоянные коэффициенты, которые должны быть вычислены так, чтобы функция $x(t)$ была оптимальной.

Выбор функций, в приближенном решении (2), должен производиться так, чтобы сумма небольшого их числа достаточно точно аппроксимировала решение уравнения (1) на заданном интервале. Кроме того, желательно, чтобы эти функции были простыми. Очевидно, что при выборе функций необходимы предварительные знания свойств решения. Эти знания могут базироваться на экспериментальных данных, логических выводах и др. данных.

Итак, если вид функций выбран, остается только найти постоянные коэффициенты $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Поскольку $x(t)$ не является точным решением (1), то после подстановки (2) в (1) получим некоторую функцию $\varepsilon(t)$ характеризующую меру приближения. Действительно, если бы $x(t)$ было точным решением (1), то функция $\varepsilon(t)$ тождественно равнялась бы нулю.

Мерой точности приближенного решения следует считать то, насколько невязка $\varepsilon(t)$ приближается к нулю на всем исследуемом интервале $a\le t\le b$.

Для определения постоянных коэффициентов $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ воспользуемся методом средних [3], согласно которому за наилучшее положение аппроксимирующей функции, принимается то, для которого сумма всех уклонений равна нулю, то есть должно иметь место равенство

$$J=\int \varepsilon(t)dt=0. \tag{3}$$

Чтобы найти $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ интеграл (3) необходимо разбить на $m+1$ интегралов, содержащих примерно одинаковые участки интегрирования. Приравняв нулю каждый из $m+1$ интегралов, получим систему, содержащую столько уравнений, сколько имеется неизвестных коэффициентов, т.е.

$$\int_a^{a_1}\varepsilon(t)dt=0, \int_{a_1}^{a_2}\varepsilon(t)dt=0,..., \int_{a_m}^{b}\varepsilon(t)dt=0 \tag{4}$$

Решив систему (4), найдем коэффициенты $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, оптимизирующие решение (2). Заметим, что, так как сумма интегралов (4) равна нулю, то равен нулю и интеграл (3), что соответствует выбранному методу.

Для определения эффективности и точности предлагаемого метода в соответствии с ним решались уравнения, ранее исследованные методами Галеркина и Ритца [2].

4. Результаты и дискуссия

<u>*Нелинейный осциллятор.*</u> Пусть необходимо найти приближенное решение уравнения

$$x^{\cdot\cdot}+\omega_0^2 x+hx^3=0, \tag{5}$$

где ω_0, h - известные коэффициенты.

Решение будем искать при начальных условиях $x=A$, $x^{\cdot}=0$ при t=0.

Найдем приближенное решение в виде

$$x=A\cos\omega t. \tag{6}$$

Выражение (6) удовлетворяет начальным условиям и содержит один неизвестный параметр ω.

Невязка, соответствующая приближенному решению, имеет вид

$$\varepsilon(t)=(A\omega_0^2-A\omega^2+\frac{3}{4}A^3h)\cos\omega t+\frac{1}{4}A^3h\cos 3\omega t. \tag{7}$$

Для определения ω необходимо в соответствии с равенством (3) решить уравнение

$$(8)\ \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}\left[(A\omega_0^2 - A\omega^2 + \frac{3}{4}A^3h)\cos\omega t + \frac{1}{4}A^3h\cos 3\omega t\right]d(\omega t) = 0$$

Так как определяется периодическое решение уравнения (5), то интегрирование производится в пределах периода колебаний $0 \le \omega t \le 2\pi$.

В результате решения уравнения (8), получим

$$(9)\qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 0{,}83A^2h\ .$$

Неизвестный коэффициент ω, соответствующий решению уравнения (5) в виде приближенного решения (6), определенный по методам Галеркина и Ритца, соответственно, равен:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 0{,}89A^2h\ ;$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 0{,}75A^2h\ .$$

Анализ полученных данных показывает, что предлагаемый метод близок к более точному методу Галеркина, но он значительно проще при нахождении аппроксимирующих коэффициентов.

Вертикальное падение тела с учетом сопротивления воздуха

Уравнение падения тела с учетом сопротивления воздуха имеет вид:

$$(10)\qquad mV^{\cdot} = mg - kV^2$$

где: m - масса движущегося тела; V - скорость падения груза; g - ускорение силы тяжести; k - коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и квадратом скорости.

Преобразовав (10), получим

$$(11)\qquad V = g - hV^2$$

где $h = \dfrac{k}{m}$.

Найдем приближенное решение уравнения движения при условии, что при t = 0 $V_0 = 0$.

Приближенное решение будем искать в виде [2]

$$(12)\qquad V = V_0(1 - e^{Ct})$$

где: С – постоянная, которую необходимо определить;

$V_0 = \sqrt{\dfrac{g}{h}}$ - конечная скорость падения массы m.

При принятом приближении (12), невязка определится:

$$(13)\qquad \varepsilon(t) = (V_0C - 2g)e^{-Ct} + ge^{-2Ct}$$

Для определения С необходимо в соответствии с (3) решить уравнение:

$$(14)\qquad \int_0^{\alpha}\varepsilon(t)dt = \int_0^{\infty}\left[(V_0C - 2g)e^{-Ct} + ge^{-2Ct}\right]dt = 0$$

Пределы интегрирования выбраны так, чтобы охватить всю область положительных значений времени.

Решая (14), найдем

$$(15)\qquad C = \frac{3}{2}(kg/m)^{\frac{1}{2}}\ .$$

С учетом (15) приближенное решение уравнения (11) примет вид

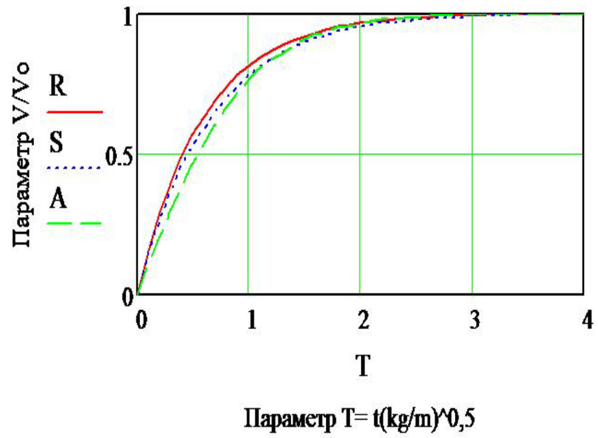
$$V = V_0\left\{1 - \exp\left[-\frac{3}{2}(\frac{kg}{m})^{\frac{1}{2}}t\right]\right\}.$$

Точное и приближенное по методу Ритца решение уравнения (11), соответственно, имеет вид

$$\left(\frac{1-\dfrac{V}{V_0}}{1+\dfrac{V}{V_0}}\right)^{\frac{1}{2}} = \exp\left[-(\frac{kg}{m})^{\frac{1}{2}}t\right]$$

$$V = V_0\left\{1 - \exp\left[-\frac{5}{3}(\frac{kg}{m})^{\frac{1}{2}}t\right]\right\}$$

На фиг.1 представлен график, сравнивающий результаты, полученные по предлагаемому методу, методу Ритца и точным решением. Из сравнения видно, что решение по предлагаемому методу точнее, чем по методу Ритца, к тому же его получение менее трудоемко.



Фиг. 1 Сравнение решений дифференциального уравнения:
- метод Ритца;
- предлагаемый метод;
- точное решение.

5. Заключение

- разработанный метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на оценке средней невязки с помощью метода средних позволяет с достаточной степенью точности найти приближенное решение в простом виде;
- предлагаемый метод может быть применен как к гладким, так и кусочно-гладким уравнениям, обладающим как колебательными, так и асимптотическими решениями;
- математический аппарат предлагаемого метода в применении проще, чем аппарат методов Галеркина и Ритца, а точность решения получается не ниже, чем в методе Ритца.

6. Литература

1. Смелягин А.И. Синтез и исследование машин и механизмов с электромагнитным приводом. Новосибирск. Новосибирский университет, 1991г. 249 с.

2. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М: Л: ГЭИ, 1962г. 456 с.

3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1963г.- 400 с.